

江苏省仪征中学 2018-2019 学年第高二期末复习讲义 (6)

教师版

1. 若函数 $y = f(x)$ 的图像经过点 $(1, 2)$, 则 $y = f(-x) + 1$ 的图像必经过的点坐标是 $(-1, 3)$.

2. 若函数 $y = (\frac{1}{2})^{|1-x|} + m$ 的图象与 x 轴有公共点, 则 m 的取值范围是 $[-1, 0]$.

【答案】 $[-1, 0]$

3. 已知 $f(n) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{3n+1}$, 则 $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{3k+2} + \frac{1}{3k+3} + \frac{1}{3k+4} - \frac{1}{k+1}$.

4. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x, & x \leq 0 \\ x \ln x, & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = kx - 1$, 若函数 $y = f(x) - g(x)$ 有且仅有 4 个不同的零点, 则实数 k 的取值范围为 $(1, 2)$.

5. 将六名教师分配到甲、乙、丙、丁四所学校任教, 其中甲校至少分配两名教师, 其它三所学校至少分配一名教师, 则不同的分配方案共有 660 种.(用数字作答).

【答案】 660

6. 若二项展开式 $(a + \sqrt{x})^5$ 的第三项系数为 80, 则实数 $a = 2$.

【答案】 2

7. 已知函数 $y = f(x+1)$ 是定义域为 R 的偶函数, 且 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递减, 则不等式 $f(2x-1) > f(x+2)$ 的解集为 $(\frac{1}{3}, 3)$.

【答案】 $(\frac{1}{3}, 3)$

8. 甲、乙两名运动员进行乒乓球单打比赛, 根据以往比赛的胜负情况知道, 每一局甲胜的概率为 $\frac{2}{3}$, 乙胜的概率为 $\frac{1}{3}$. 如果比赛采用“五局三胜”制, 求甲以 3:1 获胜的概率

$$P = \frac{8}{27}$$

9. 设 a 为非零实数, 偶函数 $f(x) = x^2 + a|x-m| + 1$ 在区间 $(2, 3)$ 上存在唯一零点, 则实数 a 的取值范围是 $(-\frac{10}{3}, -\frac{5}{2})$.

10. 对于三次函数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d (a \neq 0)$, 定义: 设 $f''(x)$ 是函数 $y = f(x)$ 的导数 $y = f'(x)$ 的导数, 若方程 $f''(x) = 0$ 有实数解 x_0 , 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为函数 $y = f(x)$ 的“拐点”. 有同学发现“任何一个三次函数都有‘拐点’; 任何一个三次函数都有对称中心;

且‘拐点’就是对称中心.”请你将这一发现为条件，函数 $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{4}$ ，则它的

对称中心为_____；计算 $f(\frac{1}{2013}) + f(\frac{2}{2013}) + f(\frac{3}{2013}) + \dots + f(\frac{2012}{2013}) =$ _____.

【答案】 $(\frac{1}{2}, 1)$ ；2012

11、在函数 $f(x) = a \ln x + (x+1)^2 (x > 0)$ 的图象上任取两个不同点 $P(x_1, y_1)$ ， $Q(x_2, y_2)$ ，
总能使得 $f(x_1) - f(x_2) \geq 4(x_1 - x_2)$ ，且 $x_1 > x_2$ ，则实数 a 的取值范围为_____ **答案】** $a \geq \frac{1}{2}$.

12、函数 $f(x) = \begin{cases} a, & (x=1) \\ (\frac{1}{2})^{|x-1|} + 1, & (x \neq 1) \end{cases}$ ，若关于 x 的方程 $2f^2(x) - (2a+3)f(x) + 3a = 0$
有五个不同的实数解，则 a 的取值范围是_____.

【答案】 $(1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 2)$

【解析】 【分析】

解：∵题中原方程 $2f^2(x) - (2a+3)f(x) + 3a = 0$ 有且只有 5 个不同实数解，

∴即要求对应于 $f(x)$ 等于某个常数有 3 个不同实数解，

∴故先根据题意作出 $f(x)$ 的简图：

由图可知，只有当 $f(x) = a$ 时，它有三个根。

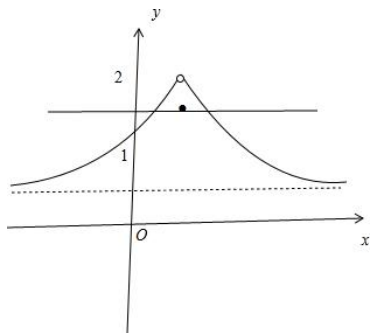
所以有： $1 < a < 2$ ①.

再根据 $2f^2(x) - (2a+3)f(x) + 3a = 0$ 有两个不等实根，

得： $\Delta = (2a+3)^2 - 4 \times 2 \times 3a > 0 \Rightarrow a \neq \frac{3}{2}$ ②

结合①②得： $1 < a < \frac{3}{2}$ 或 $\frac{3}{2} < a < 2$.

故答案为 $(1, \frac{3}{2}) \cup (\frac{3}{2}, 2)$.



13. 按下列要求分配 6 本不同的书, 各有多少种不同的分配方式.

(1) 分成三份, 1 份 1 本, 1 份 2 本, 1 份 3 本;

(2) 甲、乙、丙三人中, 一人得 1 本, 一人得 2 本, 一人得 3 本;

(3) 平均分成三份, 每份 2 本;

(4) 平均分配给甲、乙、丙三人, 每人 2 本;

(5) 分成三份, 1 份 4 本, 另外两份每份 1 本;

(6) 甲、乙、丙三人中, 一人得 4 本, 另外两人每人得 1 本;

(7) 甲得 1 本, 乙得 1 本, 丙得 4 本.

【答案】

故共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 = 60$ (种) 不同的分配方式;

(2) 有序不均匀分组问题. 由于甲、乙、丙是不同三人, 在第(1)题的基础上, 还应考虑再分配, 故共有 $C_6^1 C_5^2 C_3^3 A_3^3 = 360$ (种) 不同的分配方式;

(3) 故分配方式有 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} = 15$ (种); (4) 有序均匀分组问题. 在第(3)题的基础上再分配给 3

个人, 共有分配方式 $\frac{C_6^2 C_4^2 C_2^2}{A_3^3} \cdot A_3^3 = C_6^2 C_4^2 C_2^2 = 90$ (种);

(5) 无序部分均匀分组问题. 共有分配方式 $\frac{C_6^4 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} = 15$ (种);

(6. 再分配给 3 个人, 共有分配方式 $\frac{C_6^4 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 90$ (种);

(7) 直接分配问题. 甲选 1 本有 C_6^1 种方法, 乙从余下 5 本中选 1 本有 C_5^1 种方法, 余下 4 本留给丙有 C_4^4 种方法. 共有分配方式 $C_6^1 C_5^1 C_4^4 = 30$ (种).

14、已知 $a \in \mathbf{R}$, 函数 $f(x) = \log_2 \left(\frac{1}{x} + a \right)$. (1) 当 $a = 1$ 时, 解不等式 $f(x) > 1$;

(2) 若关于 x 的方程 $f(x) + \log_2(x^2) = 0$ 的解集中恰有一个元素, 求 a 的值;

(3) 设 $a > 0$, 若对任意 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值的差不超过 1, 求 a 的取值范围.

14、解: (1) 由 $\log_2 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) > 1$, 得 $\frac{1}{x} + 1 > 2$, 解得 $\{x \mid 0 < x < 1\}$.

(2) $\log_2\left(\frac{1}{x}+a\right)+\log_2(x^2)=0$ 有且仅有一解, 等价于 $\left(\frac{1}{x}+a\right)x^2=1$ 有且仅有一解,

等价于 $ax^2+x-1=0$ 有且仅有一解 当 $a=0$ 时, $x=1$, 符合题意; 当 $a \neq 0$ 时,

$$\Delta=1+4a=0, \quad a=-\frac{1}{4}. \quad \text{综上, } a=0 \text{ 或 } -\frac{1}{4}.$$

(3) 当 $0 < x_1 < x_2$ 时, $\frac{1}{x_1}+a > \frac{1}{x_2}+a$, $\log_2\left(\frac{1}{x_1}+a\right) > \log_2\left(\frac{1}{x_2}+a\right)$,

所以 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值分别为 $f(t)$, $f(t+1)$.

$$f(t)-f(t+1)=\log_2\left(\frac{1}{t}+a\right)-\log_2\left(\frac{1}{t+1}+a\right) \leq 1 \text{ 即 } at^2+(a+1)t-1 \geq 0,$$

对任意 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 成立.

函数 $f(x)$ 在区间 $[t, t+1]$ 上的最大值与最小值分别为 $f(t)$, $f(t+1)$.

$$f(t)-f(t+1)=\log_2\left(\frac{1}{t}+a\right)-\log_2\left(\frac{1}{t+1}+a\right) \leq 1 \text{ 即 } at^2+(a+1)t-1 \geq 0,$$

对任意 $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 成立.

因为 $a > 0$, 所以函数 $y=at^2+(a+1)t-1$ 在区间 $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ 上单调递增,

所以 $t=\frac{1}{2}$ 时, y 有最小值 $\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}$, 由 $\frac{3}{4}a-\frac{1}{2} \geq 0$, 得 $a \geq \frac{2}{3}$.

故 a 的取值范围为 $\left[\frac{2}{3}, +\infty\right)$.

15. 设函数 $f(x)=m(x-\ln x)-\frac{1}{x}-\ln x, m \in R$.

(I) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(II) 若 $m \in (0, 1)$, 且 $f(x) \leq 0$ 在区间 $[1, e]$ 上恒成立, 求 m 的取值范围.

【答案】解：(I) 函数 $f(x) = m(x - \ln x) - \frac{1}{x} - \ln x, m \in R$;

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, 且 $f'(x) = \frac{(x-1)(mx-1)}{x^2}$,1 分

当 $m = 0$ 时, $f'(x) = \frac{-x+1}{x^2}$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递

减;2 分 当 $m < 0$ 时, $\frac{1}{m} < 0 < 1$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增, 在区
间 $(1, +\infty)$ 上单调递减;3 分

当 $0 < m < 1$ 时, $1 < \frac{1}{m}$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 上单调递增,

在区间 $(1, \frac{1}{m})$ 上单调递减, 在区间 $(\frac{1}{m}, +\infty)$ 上单调递增;4 分

当 $m = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2} \geq 0$, 函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增;5 分

当 $m > 1$ 时, $0 < \frac{1}{m} < 1$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{1}{m})$ 上单调递增,

在区间 $(\frac{1}{m}, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增;6 分

(II) 若 $m \in (0,1)$, 且 $f(x) \leq 0$ 在区间 $[1,e]$ 上恒成立, 等价于在区间 $[1,e]$ 上 $f(x)_{\max} \leq 0$;

由(I)中的讨论, 当 $0 < m \leq \frac{1}{e}$ 时, $\frac{1}{m} \geq e$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1,e]$ 上单调递减,

$f(x)_{\max} = f(1) = m - 1 \leq 0$, 即 $m \leq 1$, 从而得 $0 < m \leq \frac{1}{e}$;8 分

当 $\frac{1}{e} < m < 1$ 时, $1 < \frac{1}{m} < e$, 函数 $f(x)$ 在区间 $[1, \frac{1}{m}]$ 上单调递减,

在区间 $[\frac{1}{m}, e]$ 上单调递增, $f(x)_{\max} = \max\{f(1), f(e)\}$,

即只需 $\begin{cases} f(1) = m - 1 \leq 0 \\ f(e) = m(e - 1) - \frac{1}{e} - 1 \leq 0 \end{cases}$,

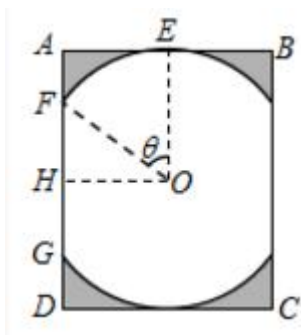
即 $\begin{cases} m \leq 1 \\ m \leq \frac{e+1}{e(e-1)} \end{cases}$, 由于 $\frac{1}{e} < \frac{e+1}{e(e-1)} < 1$, 从而得 $\frac{1}{e} < m \leq \frac{e+1}{e(e-1)}$;10 分

综上, m 的取值范围为 $0 < m \leq \frac{e+1}{e(e-1)}$ 12 分

16. 某景区修建一栋复古建筑, 其窗户设计如图所示. 圆 O 的圆心与矩形 $ABCD$ 对角线的交点重合, 且圆与矩形上下两边相切(E 为上切点), 与左右两边相交(F, G 为其中两个交点),

图中阴影部分为不透光区域, 其余部分为透光区域. 已知圆的半径为 $1m$, 且 $\frac{AB}{AD} \geq \frac{1}{2}$, 设

$\angle EOF = \theta$, 透光区域的面积为 S .



(1)求 S 关于 θ 的函数关系式，并求出定义域；

(2)根据设计要求，透光区域与矩形窗面的面积比值越大越好.当该比值最大时，求边 AB 的长度.

【答案】解：(1)过点 O 作 $OH \perp FG$ 于点 H ，则 $\angle OFH = \angle EOF = \theta$ ，
所以 $OH = OF \sin \theta = \sin \theta$ ， $FH = OF \cos \theta = \cos \theta$ ， $AB = 2 \sin \theta$ ， $AD = 2$ ，

所以 $S = 4 \left(S_{\triangle OFH} + S_{\text{扇形} OEF} \right) = 2 \sin \theta \cos \theta + 4 \times \left(\frac{1}{2} \theta \right) = \sin 2\theta + 2\theta$ ，

因为 $\frac{AB}{AD} \geq \frac{1}{2}$ ，所以 $\sin \theta \geq \frac{1}{2}$ ，所以定义域为 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$ ， $S = \sin 2\theta + 2\theta$ ；

(2)矩形窗面的面积为 $S_{\text{矩形}} = AD \cdot AB = 2 \times 2 \sin \theta = 4 \sin \theta$ ，

则透光区域与矩形窗面的面积比值为 $\frac{2 \sin \theta \cos \theta + 2\theta}{4 \sin \theta} = \frac{\cos \theta}{2} + \frac{\theta}{2 \sin \theta}$ ，

设 $f(\theta) = \frac{\cos \theta}{2} + \frac{\theta}{2 \sin \theta}$ ， $\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ，

则 $f'(\theta) = -\frac{1}{2} \sin \theta + \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta}{2 \sin^2 \theta} = \frac{\sin \theta - \theta \cos \theta - \sin^3 \theta}{2 \sin^2 \theta} = \frac{\sin \theta \cos^2 \theta - \theta \cos \theta}{2 \sin^2 \theta}$

$= \frac{\cos \theta (\frac{1}{2} \sin 2\theta - \theta)}{2 \sin^2 \theta}$ ，

因为 $\frac{\pi}{6} \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ，所以 $\frac{1}{2} \sin 2\theta \leq \frac{1}{2} < \frac{\pi}{6} \leq \theta$ ，

所以 $\frac{1}{2} \sin 2\theta - \theta < 0$ ，故 $f'(\theta) < 0$ ，

所以函数 $f(\theta)$ 在 $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2} \right)$ 上单调递减，

所以，当 $\theta = \frac{\pi}{6}$ 时， $f(\theta)$ 取得最大值，此时 $AB = 2 \sin \theta = 1m$ 。