# 高考解答新题型，开放探究谋策略

◉江苏省宜兴市第二高级中学　孙　立

2020年高考山东卷、海南卷及北京卷数学试题中出现了两种创新题型：多选题与开放探究型解答题，充分体现了“破定式，考真功”的命题理念．特别地，对于开放探究型解答题，是在给出的多个条件（一般三个左右）中，要求选择其中一个条件并进行解答．这类开放探究型解答题，条件不同，结论不同，但考查知识点基本相同，多在三角函数与解三角形和数列这两块内容中出现，属于容易或中等难度．下面结合常见的开放探究型解答题类型，精选若干实例，方便广大考生更快、更好地适应新高考的这种变化趋势，供大家学习参考．

## 一、三角函数问题

**例1**　已知条件：①函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2\omega x+\varphi)$ $\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度得到 $g(x)$ 的图像，$g(x)$ 的图像关于原点对称；②向量 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3}\sin\omega x,\cos2\omega x)$，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2}\cos\omega x,\frac{1}{4}\right)$，$\omega>0$，$f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}$；③函数 $f(x)=\cos\omega x\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}(\omega>0)$．在这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并解答问题．

已知______，函数 $f(x)$ 的图像相邻两条对称轴之间的距离为 $\frac{\pi}{2}$．

（1）若 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，且 $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，求 $f(\theta)$ 的值；

（2）求函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递减区间．

（注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分）

**解**：若选条件①：由题意可知，最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，解得 $\omega=1$，则有 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x+\varphi)$，可得 $g(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\varphi-\frac{\pi}{6}\right)$，又函数 $g(x)$ 的图像关于原点对称，可得 $\varphi=k\pi+\frac{\pi}{6}$，$k\in\mathbf{Z}$，而 $|\varphi|<\frac{\pi}{2}$，可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，即 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$．

（1）由于 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $\theta=\frac{\pi}{4}$，则有 $f(\theta)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{4}$．

（2）由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\pi+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，得 $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\pi$，令 $k=1$，得 $\frac{7}{6}\pi\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}\pi$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2}{3}\pi\right]$，$\left[\frac{7}{6}\pi,\frac{5}{3}\pi\right]$．

若选条件②：由于 $\boldsymbol{m}=(\sqrt{3}\sin\omega x,\cos2\omega x)$，$\boldsymbol{n}=\left(\frac{1}{2}\cos\omega x,\frac{1}{4}\right)$，可得 $f(x)=\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x\cos\omega x+\frac{1}{4}\cos2\omega x=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\omega x+\frac{1}{2}\cos2\omega x\right)=\frac{1}{2}\sin\left(2\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$，又最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$，解得 $\omega=1$，则有 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$．

（1）由于 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$，可得 $\theta=\frac{\pi}{4}$，则有 $f(\theta)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{4}$．

（2）由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\pi+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，令 $k=0$，得 $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\pi$，令 $k=1$，得 $\frac{7}{6}\pi\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}\pi$，所以函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2}{3}\pi\right]$，$\left[\frac{7}{6}\pi,\frac{5}{3}\pi\right]$．

选条件③:由于 $f(x)=\cos\omega x\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}=\cos\omega x\left(\sin\omega x\cos\frac{\pi}{6}+\cos\omega x\sin\frac{\pi}{6}\right)-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\omega x\cos x+\frac{1}{2}\cos^2\omega x-\frac{1}{4}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2\omega x+\frac{1}{4}\cos 2\omega x=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\omega x+\frac{1}{2}\cos 2\omega x\right)=\frac{1}{2}\sin(2\omega x+\varphi)$,又最小正周期 $T=\frac{2\pi}{2\omega}=\pi$,解得 $\omega=1$,则有 $f(x)=\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$.

(1)由于 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$,$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$,可得 $\theta=\frac{\pi}{4}$,则有 $f(\theta)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

(2)由 $\frac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x+\frac{\pi}{6}\leqslant\frac{3}{2}\pi+2k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,解得 $\frac{\pi}{6}+k\pi\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\pi+k\pi$,$k\in\mathbf{Z}$,令 $k=0$,得 $\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\frac{2}{3}\pi$,令 $k=1$,得 $\frac{7}{6}\pi\leqslant x\leqslant\frac{5}{3}\pi$,所以函数 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调递减区间为 $\left[\frac{\pi}{6},\frac{2}{3}\pi\right]$,$\left[\frac{7}{6}\pi,\frac{5}{3}\pi\right]$.

点评:以三角函数图像的平移变换、平面向量的数量积、三角恒等变换公式等这三个不同的角度给出题目条件进行自主选择,可以根据各自不同的层次水平选择自己熟知的条件进行切入,通过三角恒等变换公式的变形与转化,结合三角函数求值以及三角函数的图像与性质来展开,综合考查三角函数的相关知识与应用.

## 二、解三角形问题

**例2** (2020届北京一模)已知条件:①$(a+b)(\sin A-\sin B)=(c-b)\sin C$,②$a\sin B=b\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$,③$b\sin\frac{B+C}{2}=a\sin B$,在这三个条件中任选一个,补充到横线上,并解答问题.

在△$ABC$ 中,内角 $A$,$B$,$C$ 的对边分别为 $a$,$b$,$c$,$b+c=6$,$a=2\sqrt{6}$,______,求△$ABC$ 的面积.(注:如果选择多个条件分别解答,按第一个解答计分)

**解析**:若选①:由正弦定理,得 $(a+b)(a-b)=(c-b)c$,即 $b^2+c^2-a^2=bc$,所以 $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{bc}{2bc}=\frac{1}{2}$.因为 $A\in(0,\pi)$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.因为 $a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$,$a=2\sqrt{6}$,$b+c=6$,所以 $bc=4$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

若选②:由正弦定理,得 $\sin A\sin B=\sin B\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$.因为 $0<B<\pi$,所以 $\sin B\neq0$,所以 $\sin A=\cos\left(A+\frac{\pi}{6}\right)$,化简得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A-\frac{1}{2}\sin A$,所以 $\tan A=\frac{\sqrt{3}}{3}$.因为 $0<A<\pi$,所以 $A=\frac{\pi}{6}$.

又因为 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\frac{\pi}{6}$,所以 $bc=\frac{(b+c)^2-a^2}{2+\sqrt{3}}=\frac{6^2-(2\sqrt{6})^2}{2+\sqrt{3}}$,即 $bc=24-12\sqrt{3}$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times(24-12\sqrt{3})\times\frac{1}{2}=6-3\sqrt{3}$.

若选③:由正弦定理,得 $\sin B\sin\frac{B+C}{2}=\sin A\sin B$.因为 $0<B<\pi$,所以 $\sin B\neq0$,所以 $\sin\frac{B+C}{2}=\sin A$.又因为 $B+C=\pi-A$,所以 $\cos\frac{A}{2}=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$.因为 $0<A<\pi$,$0<\frac{A}{2}<\frac{\pi}{2}$,所以 $\cos\frac{A}{2}\neq0$,所以 $\sin\frac{A}{2}=\frac{1}{2}$,所以 $\frac{A}{2}=\frac{\pi}{6}$,所以 $A=\frac{\pi}{3}$.又 $a^2=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$,$a=2\sqrt{6}$,$b+c=6$,所以 $bc=4$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times4\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$.

点评:借助三角形中不同的边与角的关系式的给出进行自主选择,通过正弦定理的转化,从不同的角度切入,结合余弦定理、三角恒等变换公式等方式来应用,通过确定三角形中的相应的角,利用三角形的边之间的关系式的建立与转化,确定边长关系式的值,并结合三角形的面积公式来综合应用.

高考数学中的开放探究型解答题,可以充分暴露学生的思维过程和学习过程,结合探究与拓展的解题过程,很好培养学生勤于思考、善于思考,提高学生的思维情趣和学习积极性,以及养成克服困难的毅力等良好的意志品质,培养学生的数学建模能力、创新意识与创新应用.同时,数学开放探究型解答题对我们平时的教学也有很大的指导意义,要求在数学教学过程中强化整体性、思考性,关注解决问题的过程(思路与策略),而不单单是问题的结果,与此同时,还必须强调学生的主体作用与主动参与.