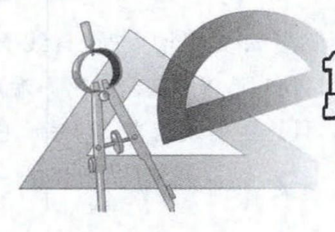

怎样教学生解题*

——基于几个典型题目的断想

渠东剑（江苏省南京市秦淮区教师发展中心　江苏省南京市渠东剑高中数学工作室）

2016年7月16日，笔者应邀在江苏第二师范学院为江苏省高中数学骨干教师培训班做讲座，主题是解题教学。笔者试图通过对近年高考题、模拟考试题的背景分析、解法思考等去追溯题目的根源，找寻学生解题能力生长的轨迹，探索实现解题能力可持续发展的教学策略。其核心观点是，解题是基本的数学学习形式；教学生学会解题，是重要的教学目标；解题教学，要突出思想方法与思维策略引领，着眼于学生能力的可持续发展。本文是根据现场报告的部分内容整理而成。

1　在平时就埋下生根发芽的种子

例1　（2014年高考数学江苏卷第19题）已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，其中 e 是自然对数的底数。

（Ⅰ）证明：$f(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数；

（Ⅱ）若关于 x 的不等式 $mf(x)\leqslant\mathrm{e}^{-x}+m-1$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上恒成立，求实数 m 的取值范围；

（Ⅲ）已知正数 a 满足：存在 $x_0\in[1,+\infty)$，使得 $f(x_0)<a(-x_0^3+3x_0)$ 成立。试比较 e^{a-1} 与 $a^{\mathrm{e}-1}$ 的大小，并证明你的结论。

这里主要讨论第（Ⅲ）问。在由第一个条件确定 a 的取值范围后，要比较 e^{a-1} 与 $a^{\mathrm{e}-1}$ 的大小，必须要构造函数，利用导数研究该函数的单调性，进而得到结果。

问题中没有函数，需要构造函数解决问题，这正是函数思想的应用；如果题目中有函数，解决问题不需要构造新的函数，则属于函数问题。这可能是函数问题与函数思想的区别。显然，构造函数解决问题，即创造一个新的研究对象，并用它作为工具去解决问题，对学生的创造能力有较高的要求，也应属于运用数学知识与思想方法去解决问题的范畴。联想这些年的高考试题，需要构造新函数解决的比比皆是。特别是江苏卷，实施新课程高考以来，几乎每年的压轴题都考查函数构造，可以说备受命题者青睐。但从考生答卷的情况看，面对新颖的、需要自己构造对象——“用数学”去解决新问题时，学生显得力不从心。虽然学生做了千千万万的题，但其创造能力的表现还是不能令人满意。要培养这种能力，在平时就要埋下能让知识生根发芽的种子。

例如，在苏教版教材“指数函数”的第一节课，有这样一道看似简单实则意蕴深远的例题。

比较下列各组数中两个值的大小：

(1) $1.5^{2.5}$，$1.5^{3.2}$；　(2) $0.5^{-1.2}$，$0.5^{-1.5}$。

该题看似简单，实则蕴含着重要的函数思想——需要引进指数函数解决。问题的思维价值在于怎样想到“引进”一个“指数函数”？如果教学直接讲解告知，即像教材那样直接就“考查指数函数……”，解题过程无懈可击，学生“听懂”没有困难，解决类似问题也可模仿，好像并无不妥。但是，结果似从天而降，教学强加于人，学生解题可能止于模仿。

其实，本题教学最重要的就是，启发、引导学生探究，把构造函数解决问题的念头给“逼”出来：让学生感受到直接计算不是解决问题的办法，必须要寻求其他途径；观察两个式子的特征——都是指数式，底数相同，指数不同；底数不变，指数变化——联系指数函数……

这正是构造函数解决问题的思维过程，使学生经历观察、联想、构造、尝试等解决问题的一般过程。这样的思想、方法、意识与策略，必须要给学生多次的机会，让学生独立思考，亲自去尝试，并不断反思与深

* 本文系江苏省教育科学“十二·五”规划2015年度重点资助课题“高中学生数学推理的心理学实证研究”（B-a/2015/02/027）阶段成果。

化，方能浸入学生的骨髓，形成属于自己的能力。

2 奇思妙想从何而来

例 2 （2015 年高考数学江苏卷第 19 题）已知函数 $f(x)=x^3+ax^2+b(a,b\in\mathbf{R})$。

（Ⅰ）试讨论 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）若 $b=c-a$（实数 c 是与 a 无关的常数），当函数 $f(x)$ 有三个不同零点时，a 的取值范围恰好是 $(-\infty,-3)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$，求 c 的值。

这里仍只说第（Ⅱ）问。由于问题的表述是“倒过来”的，解答也要求学生“反着想”。因而，题目看上去虽情境熟悉，但仍充满新意，可以说本题是平凡中寓意新。解答本题特别是其推理证明，还是有一定难度的，学生的答卷也反映了这一点。但是，高考阅卷现场还是发现了令人眼前一亮的解法：

因为 $f(x)$ 的两个极值点为 $x_1=0,x_2=-\frac{2a}{3}$，所以函数 $f(x)$ 有三个不同零点 $\Leftrightarrow f(0)f\left(-\frac{2a}{3}\right)<0\Leftrightarrow(c-a)\left(\frac{4}{27}a^3+c-a\right)<0$。因为不等式 $(a+3)(a-1)\cdot\left(a-\frac{3}{2}\right)^2>0$ 的解集是 $(-\infty,-3)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$，所以 $(c-a)\left(\frac{4}{27}a^3+c-a\right)=k(a+3)\cdot(a-1)\cdot\left(a-\frac{3}{2}\right)^2(k>0)$。整理，再由两边关于 a 的对应系数相等，很快得到答案 $c=1$。

这样的解法，思路简捷，不禁令人拍案叫绝：它绕过了较为复杂的推理与计算，规避了分类讨论带来的困难，计算与推理自然融合，一气呵成。问题是，这样的奇思妙想从何而来？可以追溯它的根源吗？对我们的教学又有何启示呢？

其实，它的根早在初中阶段就应该深入学生的内心：三个一次——一次函数、一次方程与一次不等式，函数、方程与不等式的关系，用函数思想统领方程与不等式学习，在初中阶段就应该得到充分的体现。

高中的“解不等式”，更应该充分强调用函数统领全局。试想，为什么解一元二次不等式，我们不提倡、不认同甚至要排斥因式分解的方法，而要走“程式化”算法的思路？（即一元二次不等式—一元二次方程—求根—根据函数图像确定不等式的解集）就是为了体现函数这一核心知识、观点与思想方法。如果我们从初中到高中一以贯之地强调这样的观点，突出函数思想在解决方程与不等式问题时的重要引领作用，强调数形结合，乃至于突出函数思想统领高中数学全局，那么，上述的奇思妙想也许就变得顺理成章了。

3 让学生也能想起来

例 3 （2008 年高考数学江苏卷第 13 题）满足条件 $AB=2,AC=\sqrt{2}BC$，则 $S_{\triangle ABC}$ 的最大值是______。

这是什么类型的问题？如果你说是解三角形问题，我不反对，可以用正弦定理、余弦定理转化为函数问题解决。例如，若视角 C 为变量，则目标函数为 $S_{\triangle ABC}=2\sqrt{2}\cdot\frac{\sin C}{32\sqrt{2}\cos C}$；若设 $BC=x$，则目标函数为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{4}\sqrt{128-(x^2-12)^2}(2\sqrt{2}-2<x<2\sqrt{2}+2)$。不仅建立目标函数过程较繁，而且后续计算也很复杂。

如果以运动变化的观点去分析，用解析几何的方法去处理，则别有洞天。

以 AB 中点为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系（如图 1）。设 $C(x,y)$，则由条件易得 $(x-3)^2+y^2=(2\sqrt{2})^2$，故点 C 在以 $(3,0)$ 为圆心，$2\sqrt{2}$ 为半径的圆 E 上。从而 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot|y_C|=\frac{1}{2}\cdot2\cdot|y_C|=|y_C|\leqslant2\sqrt{2}$。

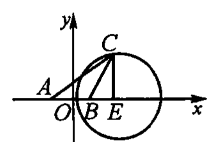

图 1

问题背景直观，思路另辟蹊径，四两拨千斤。

教学如果将此种解法和盘托出，学生会惊叹解析法之妙，但也只能是望洋兴叹，遇到新问题还是难以想起来。2016 届南京市第一次模拟考试第 17 题就是一个典型例证。

题目：如图 2 所示，A,B 是两个垃圾中转站，B 在 A 的正东方向 16 km 处，直线 AB 的南面为居民生活区。为了妥善处理生活垃圾，政府决定在 AB 的北面建一个垃圾发电厂 P。垃圾发电厂 P 的选址拟满足以下两个要求（A,B,P 可看成三个点）：①垃圾发电厂到两个垃圾中转站的距离与它们每天集中的生活垃圾量成反比，比例系数相同；②垃圾发电厂应尽量远离居民区（这里参考的指标是点 P 到直线 AB 的距离要尽可能大）。现估测得 A,B 两个中转站每天集中的生活垃圾量分别约为 30 t和 50 t，问垃圾发电厂该如何选址才能同时满足

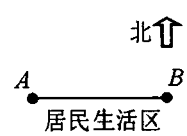

图 2

上述要求？

阅卷表明，学生由条件得到$\frac{PA}{PB}=\frac{50}{30}=\frac{5}{3}$后，（实际上已转化为例2的情形）绝大多数学生仍旧走解三角形的路子。据考后调研，虽然大多数学生都知晓例2这道经典问题及其解法，也明白“阿波罗尼斯圆”的知识背景，但面临此情境，很多学生还是没有看出其本质。考后南京市教研室对一所四星级高三学生（约600人）问卷调查，仅有3%的学生想到了解析法，出人意料。而当教师讲评试卷“旧事重提”时，学生的表现是感叹、懊悔、失望。我们不禁反问：这道题教学时花了成本，追求“一题多解”也比较投入，甚至教师认为已较为彻底地解决了“阿波罗尼斯圆”背景的相关问题，为什么学生的表现还如此令人大跌眼镜呢？

其实，当我们教给学生新思路时，不能只满足于学生听得懂，更在于怎样让学生也能想起来；既要一题多解，开拓思维，更要多解一优，优化思维；要站在更高的观点，甚至跳出题外，去寻找一般的解题思维策略。要做到这点，笔者认为关键是让学生经历探索、比较与优化的过程。比如，就本题教学，在几种方法对比、让学生感悟解析法之妙后，不应该止于比较，还应引导学生经历下面的探索过程：

（1）本题是求$S_{\triangle ABC}$的最大值，说明面积是变化的，否则何来最值？为什么会有变化呢？（2）其中必有变化的原因，原因是什么？谁是幕后操纵变化的“黑手”？（3）边长AB是定值，一定意义上点A，B是确定的，这又意味着点C在变，否则何来变化，哪有最值？（4）它是怎样变化的？怎样探究一个点的变化？在怎样的环境下去探究呢……此时，建立坐标系、设点、列式，代入、化简、分析C点的轨迹、应用……一系列的思维链条自然产生了。

这是一般的解题策略，从大处着眼，从解决问题的大方向入手，这就是在追求更上位的思维策略。道不远人，只有我们这样坚持下去，学生的学习才能不仅仅止于模仿和记忆，遇到新问题才能自己想起来。

另外，这个问题是解三角形问题，还是三角函数问题？是代数问题，还是解析几何问题？谁能说得清？——还需要说清吗？大巧若拙；解题，是对题型、套模式，还是返璞归真，走自然大道？——还需要商量吗？数学既讲理，又讲情；思路是自然的，策略是合乎情理的。

4 感悟知识背后的意蕴

例4 （2006年高考数学全国卷Ⅰ理科第11题）用长度分别为2，3，4，5，6（单位：cm）的5根木棒围成一个三角形（允许连接，但不允许折断），能够得到的三角形的最大面积为（　　）。

A. $8\sqrt{5}$ cm^2　　B. $6\sqrt{10}$ cm^2

C. $3\sqrt{55}$ cm^2　　D. 20 cm^2

实际情况表明，学生答题的情况并不好，为什么呢？因为教材上没有现成的结论，大量的练习也不能解决这类问题。若穷尽所有能够组成三角形的情形计算再比较，费时费力，显然不是好的解法，也有违命题者的初衷。那么，这道题究竟考的是什么呢？

其实，基本不等式不仅仅是两个平均数的大小比较，应用也不只是“一正、二定、三相等”求最值。它的本质是两个正数的几何平均数与算术平均数的大小关系，二者相等只是那样一个“时刻”（当且仅当）。从其证明过程，也不难看出另有意蕴——当等号不成立时，二者相差多少。

由$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$可知，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})$越小，$\sqrt{a}$与$\sqrt{b}$最接近，也就是$a$与$b$最接近时，二者的差最小，即当$a\to b$时，$\sqrt{ab}\to\frac{a+b}{2}$。

基于此，再去考虑例4，答案就不难得到了：当三角形的周长一定时，正三角形面积最大。本题虽然不能组成正三角形，但可以“尽量”地“接近”正三角形，从而使其面积达到最大——该三角形的周长为$2+3+4+5+6=20$，无论怎样摆放，都不会出现三边相等的情形。但当三边越接近时，面积也应该越大。三边之和为20，平均为$\frac{20}{3}$，故可选6，7（2+5），7（3+4）为三边长计算，这种组合显然是三边长最接近的情形。答案为B。

无独有偶，2010年高考数学江苏卷第19题是一道数列背景下的求最大值问题，要解这道题就要用到上述结论与思想方法。

例5 （2010年高考数学江苏卷第19题）设各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，已知$2a_2=a_1+a_3$，数列$\{\sqrt{S_n}\}$是公差为d的等差数列。

（Ⅰ）求数列$\{a_n\}$的通项公式（用n，d表示）；

（Ⅱ）设c为实数，对满足$m+n=3k$，$m\neq n$的任意正整数m，n，k，不等式$S_m+S_n>cS_k$都成立。求证：c的最大值为$\frac{9}{2}$。

这里只说第（Ⅱ）问。一方面，由（Ⅰ）得$S_n=n^2d^2$。由$S_m+S_n=(m^2+n^2)d^2>\frac{(m+n)^2}{2}d^2=\frac{9}{2}S_k$，

得 $c_{\max}\geqslant\frac{9}{2}$。这实际上证明了 $\frac{9}{2}$ 是 $c_{\max}$ 的下界。

另一方面，就要证明 $\frac{9}{2}$ 是 $c_{\max}$ 的下确界。事实上，对任意的 $a>\frac{9}{2}$，取 $m=\frac{3}{2}k+1,n=\frac{3}{2}k-1$（$k$ 为正整数），当 $k\to+\infty$ 时，m,n 无限接近，故要使 $S_m+S_n<aS_k$，即 $\left[\left(\frac{3}{2}k+1\right)^2+\left(\frac{3}{2}k-1\right)^2\right]d^2<ak^2d^2$，只要 $k>\sqrt{\frac{2}{a-\frac{9}{2}}}$，所以这样的 k 是存在的……具体过程不赘述。这道题正是考查了上述基本不等式背后的意蕴。

遗憾的是，当年全省仅有少数考生给出解答。这固然与题目难度大、解题思想方法新有关，但当答案呈现大众面前时，竟然有部分高中数学教师直呼“看不懂”，甚至还有一些教师固执己见，给出并坚持错误的答案。

笔者认为，教师的高度决定学生的高度，学生想不到，可能还是教师理解不深刻，进而学生达不到这样的高度。有些知识、方法与思想是隐形的，需要感悟，这种感悟正是来自教材的深入品读，对解题过程的深刻反思，对思想方法的概括升华。只有教师深刻理解了，并在教学中让学生主动去感悟，才能实现学习的升华。

5　从多个角度认识同一个问题

“横看成岭侧成峰，远近高低各不同”，从不同角度看问题会有不同的感受；“条条大路通罗马”，到达目的地的方式不止一个。换一种视角去观察，换一种方式去思考，换一种心境去感悟，也许会有意外的惊喜。

例6　已知实数 x,y 满足 $x+2y=1$，求 $s=x^2+y^2$ 的最小值。

针对条件“实数 x,y 满足 $x+2y=1$”，它是一个二元一次方程，其解有无穷多个，其解之间的关系似乎不密切。当我们用一次函数去理解，两个变量之间就有了因果关系、有了变化，就有了变化过程中的不变；如果从形的角度，它又是一条直线，方程的解与直线上的点对应，于是有了动点，这些动点都在同一条直线上……这样，自然就有了如下的思路。

(1)代数观点：x,y 在变，但二者是关联的，满足 $x+2y=1$，一个可以用另一个表示，于是 $s=x^2+y^2=(1-2y)^2+y^2$——问题转化为二次函数……

(2)几何视角：动点 (x,y) 在直线 $x+2y=1$ 上运动。$s=x^2+y^2$ 可以看成动点 (x,y) 到原点距离的平方，何时最小？——问题转化为解析几何背景下的点到直线的距离……

(3)向量（不等式）方向：$1=x+2y=(1,2)\cdot(x,y)\leqslant\sqrt{1^2+2^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2}$——问题转化为不等式……

面对所研究的对象，从不同的视角去观察，可能有不同的感受；站在更高层次，把这些不同的感受联系对比，又会有新的认识；新的认识让我们达到更高的境界，甚至有豁然开朗之感。

6　回归思想方法本源

例7　（2013年高考数学江苏卷第17题）如图3，在平面直角坐标系 xOy 中，点 $A(0,3)$，直线 $l:y=2x-4$。设圆 C 的半径为1，圆心在 l 上。

（Ⅰ）若圆心 C 也在直线 $y=x-1$ 上，过点 A 作圆 C 的切线，求切线的方程；

（Ⅱ）若圆 C 上存在点 M，使 $MA=2MO$，求圆心 C 的横坐标 a 的取值范围。

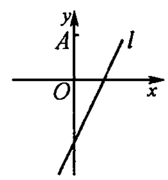

图3

当年这道题全省平均得分为6.23，还不到满分的一半（满分14分）。第（Ⅰ）问就是6分，且属于容易题，完全由教材例习题改编而来，难就难在第（Ⅱ）问，那么，第（Ⅱ）问难在哪儿呢？

这个圆 C 上存在一个点 M，使 $MA=2MO$，满足这个条件意味着什么？不难得到另一个圆 D。于是问题转化为点 M 分别在两个圆上，怎么求圆心 C 的横坐标 a 的取值范围呢？

高考阅卷表明，很多考生试图把一个量（圆心 C 的横坐标 a）表示为另外一个量的函数，然后再求这个函数的值域。应该说这是常规的思路，但在这里此路不通。如图4，一个圆心 C，可能对应两个交点 M（如图4(1)）；一个交点 M，也有可能对应两个圆心 C（如图4(2)）。或者一个圆心可能对应两个交点，或者一个交点可能对应两个圆心。这样的对应关系，怎么可能找到二者之间的函数关系？在理论上是行不通的。很多考生却深陷其中不能自拔。

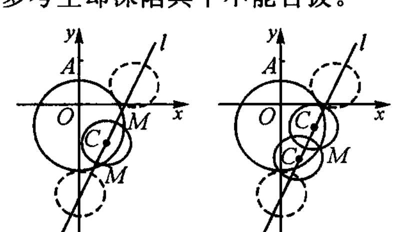

图4

还有的考生当得到圆 D 的方程后，并未去研究轨迹为何图形，只是专注于点 M 同时在两条曲线上，得到由两条曲线方程联立而成的方程组 $\begin{cases}x^2+y^2+2y-3=0,\\(x-a)^2+[y-2(2a-4)]^2=1\end{cases}$ 有解，消去 x 或 y，转化为一元二次方程，其判别式 $\Delta\geqslant0$，问题朝着代数（方程）的方向转化。这种思路几乎走不到底：一是还不能够仅仅用判别式 $\Delta\geqslant0$，因为该一元二次方程在 $\mathbf{R}$ 上并不是总有解，而是在某个范围（区间）内有解，这样又需要借用一元二次函数来研究；二是即使做了这样的转化，后续的运算将十分复杂，一般的考生难以走下去……

有人将这道题形容为绵里藏针，不无道理。其实，本题所重点考查的，正是解析几何的本质思想——数形结合，难就难在要多次进行数形转换：一个圆 C，代数方程是什么？——圆 C 的方程；由 $MA=2MO$ 得到什么？——方程；该方程是什么图形？——圆 D。从而可得点 M 在圆 D 上，点 M 也在圆 C 上。这一个点 M，既在这个圆上又在那个圆上，意味着什么？还有怎样的表达？想想，再想想……找到问题的关键——这两个圆有交点。两个圆有交点是图形关系，回到代数上来呢？——建立关于 a 的不等式，解不等式……答案也就近在眼前了。

没有这些转化，是解决不了这个问题的。但这种转化究竟是什么？图形到代数，代数到图形，图形关系，代数关系，来来回回，反反复复……其有关转化过程如图5所示。

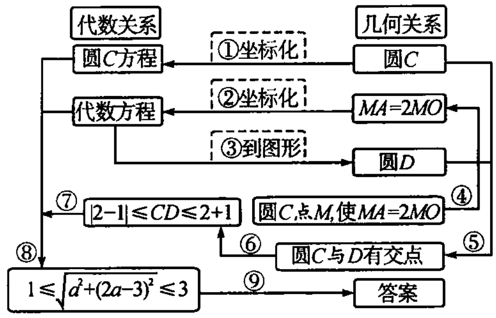

图5

真是观念一新天地宽！

笔者始终认为，学数学就是要多思考，在思考的过程中学会思考。若一名学生只顾埋头做题，只用耳朵听课，他的效率肯定是低下的；同样地，若一名教师的解题教学，只是就解题而解题，只是解给学生看，不是启发学生自己去想，不是引导学生去反思，其解题教学的效果也是可想而知的。

看山是山，看水是水；看山不是山，看水不是水；看山还是山，看水还是水。追求认识的境界，还是要回归本原，返璞归真，自然而然。解题是这样，解题教学也是这样。

参考文献：

[1] 渠东剑.指数函数教学教什么[J].数学通报，2012(3)：6-9.

[2] 渠东剑.提高教学内容的理解力[J].数学通讯（上），2012(12)：1-5.

[3] 渠东剑.春风又绿江南岸[J].中学数学教学参考：上旬，2013(8)：32-35.

（上接第27页）

结构。整个问题的解决过程蕴含了从生活现象抽象出数学模型，再到严谨数学证明的过程，对培养学生学数学、用数学的意识是很有帮助的。

这个问题似乎到此结束了，但我们再认真思考一下，根据图2，还可以向学生渗透极限的思想。我们可以看到射线 PP' 与直线 $y=x$ 的距离为定值 $d=\frac{|b-a|}{\sqrt{2}}$，当 $m\to+\infty$ 时，$\sin\angle AOP'=\frac{d}{|OP'|}\to0$，$\angle AOP'\to0$，此时射线 OP' 与直线 $y=x$ 重合，所以 $\frac{a+m}{b+m}\to1$。

我们把 $\frac{a+m}{b+m}\to1$ 还原成生活现象就是：当我们在糖水中加入足够多的糖，如果我们不考虑达到饱和的问题，显然，糖水的浓度是趋近于1的。

对于这个例题的处理过程，不仅可以让学生体会到在日常生活中充满了数学问题，还会让学生感受到数学与我们的生活息息相关。解决这个数学问题所采用的方法也包括了处理不等式证明问题常用的方法：比较法和分析法。数形结合又让学生感受到数学的巨大魅力和完美统一。极限思想作为现代数学重要的数学思想方法，适时地渗透，对提高学生的综合素养是很有帮助的。以不等式的获得和证明为明线，以数学思想方法的渗透和领悟为暗线，明暗线索交相呼应，学生不断地在学习知识的过程中体会数学思想方法，感悟逻辑推理、数学抽象、数学建模、直观想象等数学核心素养。

参考文献：

[1] 任勇.数学复习课：借题发挥[J].福建中学数学，2013(9)：1-4.

[2] 惠州人."糖水浓度与数学发现"的系列活动课[J].中学数学教学参考，2000(10)：18-25.