2020-2021 学年高一数学下学期期末考试仿真模拟试卷三

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1. $\left(\frac{2}{x}-x\right)^6$ 的展开式中含 x^4 项的系数是（　　）

A. 60　　B. -60　　C. 12　　D. -12

【答案】D

【解析】由二项式定理展开式的通项公式得：

$$T_{k+1}=C_6^k\left(\frac{2}{x}\right)^{6-k}(-x)^k=(-1)^k2^{6-k}C_6^kx^{2k-6}，\quad k=0,1,2,3,4,5,6$$

所以令 $2k-6=4$ 得 $k=5$，所以 $T_{5+1}=(-1)^5 2^{6-5}C_6^5x^4=-12x^4$，故 x^4 的系数为 -12. 故选：D.

2. 已知复数 z 满足 $z(1-i)=|2+2i|$（其中 i 为虚数单位），则复数 z 的虚部为（　　）

A. $\sqrt{2}$　　B. $-\sqrt{2}$　　C. $\sqrt{2}i$　　D. $-\sqrt{2}i$

【答案】A

【解析】复数 z 满足 $z(1-i)=|2+2i|$，

则 $z=\frac{|2+2i|}{1-i}=\frac{2\sqrt{2}(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$，即复数 z 的虚部为 $\sqrt{2}$，故选：A.

3. 2020 年是脱贫攻坚年，为顺利完成“两不愁，三保障”，即农村贫困人口不愁吃、不愁穿，农村贫困人口义务教育、基本医疗、住房安全有保障，某市拟派出 6 人组成三个帮扶队，每队两人，对脱贫任务较重的甲、乙、丙三县进行帮扶，则不同的派出方法种数共有（　　）

A. 15　　B. 60　　C. 90　　D. 540

【答案】C

【解析】依题意，首先将人平均分成 3 组，再将三组进行全排列即可，所以所有可能的派出方法有

$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}\cdot A_3^3=90$（种），故选：C

4. 已知随机变量 $X\sim N\left(3,\sigma^2\right)(\sigma>0)$，若 $P(X<6)=0.8$，则 $P(X<0)=$（　　）

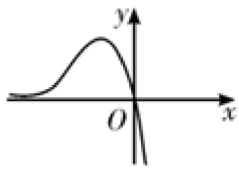
A 0.2　　B. 0.3　　C. 0.5　　D. 0.7

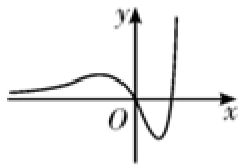
【答案】A

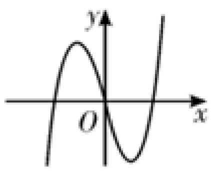
【解析】随机变量 $X \sim N\left(3,\sigma^2\right)(\sigma>0)$，可得正态分布曲线的对称轴为 $x=3$

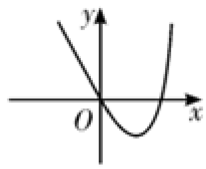
$P(X<0)=1-P(X<6)=1-0.8=0.2$，故选：A

5. 函数 $f\left(x\right)=\left(x^2-2x\right)e^x$ 图象大致是(　　)

A. 

B. 

C. 

D. 

【答案】B

【解析】函数 $f\left(x\right)=\left(x^2-2x\right)e^x$，则 $f'\left(x\right)=\left(x^2-2\right)e^x$，令 $f'\left(x\right)=0$，

解得 $f\left(x\right)$ 的两个极值点为 $\pm\sqrt{2}$，故排除 AD，且当 $x<0$ 时，$f\left(x\right)$ 恒为正，排除 C，

即只有 B 选项符合要求，故选：B.

6. 设 $(3x^3+\dfrac{1}{x})^n$ 展开式的各项系数之和为 t，其二项式系数之和为 h，若 $h+t=272$，则展开式中的常数项为(　　)

A. 12　　B. 22　　C. 18　　D. 81

【答案】A

【解析】由题意，$(3x^3+\dfrac{1}{x})^n$ 的展开式的各项系数之和 $t=4^n$，其二项式系数之和 $h=2^n$，

所以 $h+t=4^n+2^n=272$，即 $\left(2^n+17\right)\left(2^n-16\right)=0$，解得 $2^n=16$，则 $n=4$，

所以 $(3x^3+\dfrac{1}{x})^n=(3x^3+\dfrac{1}{x})^4$，它的展开式的通项为 $T_{r+1}=C_4^r\left(3x^3\right)^{4-r}\left(\dfrac{1}{x}\right)^r=C_4^r3^{4-r}x^{12-4r}$，

令 $12-4r=0$，解得 $r=3$，

所以展开式中的常数项为 $C_4^3 3^{4-3}x^{12-4\times3}=4\times3=12$，故选：A.

7. 俄国著名飞机设计师埃格•西科斯基设计了世界上第一架四引擎飞机和第一种投入生产的直升机，当代著名的“黑鹰”直升机就是由西科斯基公司生产的．1992年，为了远程性和安全性上与美国波音 747 竞争，

欧洲空中客车公司设计并制造了 $A340$，是一种有四台发动机的远程双过道宽体客机，取代只有两台发动机的 $A310$．假设每一架飞机的引擎在飞行中出现故障率为 $1-p$，且各引擎是否有故障是独立的，已知 $A340$ 飞机至少有 3 个引擎正常运行，飞机就可成功飞行；$A310$ 飞机需要 2 个引擎全部正常运行，飞机才能成功飞行．若要使 $A340$ 飞机比 $A310$ 飞机更安全，则飞机引擎的故障率应控制的范围是（　　）

A. $\left(\frac{2}{3},1\right)$　　B. $\left(\frac{1}{3},1\right)$

C. $\left(0,\frac{2}{3}\right)$　　D. $\left(0,\frac{1}{3}\right)$

【答案】C

【解析】由题意，飞机引擎正常运行的概率为 p，

则 $A310$ 飞机能成功飞行的概率为 $C_2^2p^2=p^2$，

$A340$ 飞机能成功飞行的概率为 $C_4^3p^3\left(1-p\right)+C_4^4p^4=-3p^4+4p^3$，

令 $-3p^4+4p^3>p^2$ 即 $-3p^2+4p>1$，解得 $\frac{1}{3}<p<1$．

所以飞机引擎的故障率应控制的范围是 $\left(0,\frac{2}{3}\right)$．故选:C.

8. 下列实数 m 的取值范围中，能使关于 x 的不等式 $\ln(x+m)\le mx$ 恒成立的是（　　）

A. $(-1,1)$　　B. $(0,2)$　　C. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$　　D. $[1,\sqrt{2})$

【答案】C

【解析】由题意 $\ln(x+m)-mx\le 0$ 恒成立，设 $f(x)=\ln(x+m)-mx$，则 $f'(x)=\frac{1}{x+m}-m$，易知若 $m\le 0$，则 $f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$ 递增，$f(e-m)=1-m(e-m)>0$，不合题意．

所以 $m>0$，$f'(x)$ 在 $x+m>0$ 时是减函数，由 $f'(x)=\frac{1}{x+m}-m=0$ 得 $x=\frac{1}{m}-m$，当 $-m<x<\frac{1}{m}-m$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 递增，当 $x>\frac{1}{m}-m$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 递减，

所以 $x=\frac{1}{m}-m$ 时，$f(x)$ 取得极大值也是最大值 $f(\frac{1}{m}-m)=\ln\frac{1}{m}-1+m^2=m^2-\ln m-1$，

令 $g(m)=m^2-\ln m-1$，则 $g'(m)=2m-\frac{1}{m}=\frac{2m^2-1}{m}=\frac{2(m-\frac{\sqrt{2}}{2})(m+\frac{\sqrt{2}}{2})}{m}$，

因为$m>0$，所以当$0<m<\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$g'(m)<0$，$g(m)$递减，当$m>\frac{\sqrt{2}}{2}$时，$g'(m)>0$，$g(m)$递增，由于$g(1)=0$，所以$g(\frac{\sqrt{2}}{2})<0$，所以存在$m_0\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，使得$g(m)=0$，当$m_0\le m\le 1$时，$g(m)\le 0$，原不等式成立，对照各选项，只有C满足，故选：C.

二、选择题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分．

9. 若复数z满足$(z+2)i=3+4i$（i为虚数单位），则下列结论正确的有（　　）

A. z的虚部为3　　　　B. $|z|=\sqrt{13}$

C. z的共轭复数为$2+3i$　　　　D. z是第三象限的点

【答案】BC

【解析】$\because (z+2)i=3+4i$，$\therefore z=\frac{3+4i}{i}-2=-3i+2$，所以，复数$z$的虚部为$-3$，$|z|=\sqrt{13}$，共轭复数为$2+3i$，复数$z$在复平面对应的点在第四象限，故选：BD.

10. 若随机变量$\xi\sim N(0,1)$，则下列结论正确的是（　　）

A. 该正态曲线关于直线$x=1$对称

B. 若$P(\xi\le 1.52)=0.9357$，则$P(\xi>1.52)=0.0643$

C. 若$P(\xi\le 1.49)=0.9357$，则$P(\xi\le -1.49)=0.9319$

D. 当$x>0$时，若$P(\xi\ge x)=\varphi(x)$，则$P(|\xi|\ge x)=2\varphi(x)$

【答案】BD

【解析】随机变量$\xi\sim N(0,1)$，则该正态曲线关于直线$x=0$对称，A错；

若$P(\xi\le 1.52)=0.9357$，则$P(\xi>1.52)=1-P(\xi\le 1.52)=0.0643$，B正确；

若$P(\xi\le 1.49)=0.9357$，则$P(\xi>1.49)=1-0.9357=0.0643$，所以

$P(\xi\le -1.49)=P(\xi\ge 1.49)=0.0643$，C错；

当$x>0$时，若$P(\xi\ge x)=\varphi(x)$，则$P(\xi\le -x)=p(\xi\ge x)=\varphi(x)$，所以

$P(|\xi|\ge x)=P(\xi\ge x)+P(\xi\le -x)=2\varphi(x)$，D正确．故选：BD.

11. 关于排列组合数，下列结论正确的是（　　）

A. $C_n^m = C_n^{n-m}$　　B. $C_{n+1}^m = C_n^{m-1} + C_n^m$

C. $A_n^m = mA_{n-1}^{m-1}$　　D. $A_n^m + mA_n^{m-1} = A_{n+1}^m$

【答案】ABD

【解析】根据组合数的性质或组合数的计算公式 $C_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!m!}$，可知 A，B 选项正确；

$A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$，而 $mA_{n-1}^{m-1} = \dfrac{m(n-1)!}{(n-m)!}$，故 C 选项错误；

$$A_n^m + mA_n^{m-1} = \frac{n!}{(n-m)!} + \frac{m\cdot n!}{(n-m+1)!} = \frac{(n-m+1)\cdot n!}{(n-m+1)!} + \frac{m\cdot n!}{(n-m+1)!} = \frac{(n+1)!}{(n+1-m)!} = A_{n+1}^m,$$

故 D 选项正确；故选：ABD.

12. 若 $0 < x_1 < x_2 < 1$，e 为自然对数的底数，则下列结论错误的是（　　）

A. $x_2e^{x_1} < x_1e^{x_2}$　　B. $x_2e^{x_1} > x_1e^{x_2}$

C. $e^{x_2} - e^{x_1} > \ln x_2 - \ln x_1$　　D. $e^{x_2} - e^{x_1} < \ln x_2 - \ln x_1$

【答案】ACD

【解析】由题意可知，对于选项 AB，可构造 $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$，则 $f'(x) = \dfrac{(x-1)e^x}{x^2}$，所以当 $x<1$ 时，$f'(x) < 0$，

即 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递减，又因为 $0 < x_1 < x_2 < 1$，所以 $f(x_1) > f(x_2)$，即 $\dfrac{e^{x_1}}{x_1} > \dfrac{e^{x_2}}{x_2}$，则化为 $x_2e^{x_1} > x_1e^{x_2}$，

所以选项 A 错误，选项 B 正确；对于选项 CD，可构造 $g(x) = e^x - \ln x$，则 $g'(x) = e^x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{xe^x - 1}{x}$，设

$h(x) = xe^x - 1$，因为 $h(0) = -1 < 0, h(1) = e - 1 > 0$，则由函数的零点存在性定理可知，存在 $x_0 \in (0,1)$，使

得 $h(x_0) = 0$，又因为 $h'(x) = (1+x)e^x$，则当 $x \in (0,1)$ 时，$h(x) > 0$，所以 $h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，所以

当 $x \in (0, x_0)$ 时，$g'(x) < 0$，函数 $g(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减；当 $x \in (x_0, 1)$ 时，$g'(x) > 0$，函数 $g(x)$ 在

$x \in (x_0, 1)$ 上单调递增，若 $0 < x_1 < x_2 < x_0$，则有 $g(x_1) > g(x_2)$，即 $e^{x_1} - \ln x_1 > e^{x_2} - \ln x_2$，则有

$e^{x_2} - e^{x_1} < \ln x_2 - \ln x_1$；若 $x_0 < x_1 < x_2 < 1$，则有 $g(x_1) < g(x_2)$，即 $e^{x_1} - \ln x_1 < e^{x_2} - \ln x_2$，则有

$e^{x_2}-e^{x_1}>\ln x_2-\ln x_1$，则选项 CD 错误；故选：ACD.

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 若$\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^n$的展开式中只有第 4 项的二项式系数最大，则二项展开式中有理项系数之和为_____.

【答案】22

【解析】由于二项式$\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^n$的展开式中只有第 4 项的二项式系数最大，所以$n=6$；

二项式$\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{x}\right)^6$的展开式的通项公式为$T_{r+1}=C_6^r\cdot\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{6-r}\cdot\left(x^{-1}\right)^r=C_6^r\cdot x^{2-\frac{4}{3}r}$，

当$r=0,3,6$时为有理项，所以有理项系数之和为$C_6^0+C_6^3+C_6^6=1+20+1=22$. 故答案为：22

14. 从 1, 2, 3, 4, 5 中任取 2 个不同的数，事件 A＝“取到的 2 个数之和为偶数”，事件 B＝“取到的 2 个数均为偶数”，则 P(B|A)＝________.

【答案】$\dfrac{1}{4}$

【解析】P（A）$=\dfrac{C_3^2+C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{4}{10}=\dfrac{2}{5}$，P（AB）$=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{1}{10}$.

由条件概率公式得 P（B|A）$=\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{2}{5}}=\dfrac{1}{4}$. 故答案为:$\dfrac{1}{4}$.

15. 设$f'(x)$是奇函数$f(x)$的导函数，$f(-2)=-3$，且对任意$x\in\mathbf{R}$都有$f'(x)<2$，则$f(2)=$________，使得$f(e^x)<2e^x-1$成立的 x 的取值范围是________.

【答案】 (1). 3 (2). $(\ln 2,+\infty)$

【解析】$\because f(x)$是奇函数，$\therefore f(2)=-f(-2)=3$，

设$g(x)=f(x)-2x$，则$g(2)=f(2)-4=-1$，$g'(x)=f'(x)-2<0$，

$\therefore g(x)$ R上单调递减，

由$f(e^x)<2e^x-1$得$f(e^x)-2e^x<-1$，即$g(e^x)<g(2)$，

$\therefore e^x>2$，得$x>\ln 2$，故答案为：3；$(\ln 2,+\infty)$.

16. 3 月 5 日为“学雷锋纪念日”，某校将举行“弘扬雷锋精神做全面发展一代新人”知识竞赛，某班现从 6 名女生和 3 名男生中选出 5 名学生参赛，要求每人回答一个问题，答对得 2 分，答错得 0 分，已知 6 名女生中有 2 人不会答所有题目，只能得 0 分，其余 4 人可得 2 分，3 名男生每人得 2 分的概率均为 $\frac{1}{2}$，现选择 2 名女生和 3 名男生，每人答一题，则该班所选队员得分之和为 6 分的概率__________.

【答案】$\frac{43}{120}$

【解析】依题意设该班所选队员得分之和为 6 分记为事件 A，

则可分为下列三类：女生得 0 分男生得 6 分，设为事件 A_1；女生得 2 分男生得 4 分，设为事件 A_2；女生得 4 分男生得 2 分，设为事件 A_3，

则：$P(A_1)=\frac{C_2^2}{C_6^2}\times C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{120}$，$P(A_2)=\frac{C_2^1C_4^1}{C_6^2}\times C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{24}{120}=\frac{1}{5}$，

$P(A_3)=\frac{C_4^2}{C_6^2}\times C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{18}{120}=\frac{3}{20}$，

$P(A)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)=\frac{43}{120}$．故答案为：$\frac{43}{120}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17. 设复数 $z=\frac{2-3i}{1+2i}$．

（1）求 z 的共轭复数 $\bar{z}$；

（2）设 $a\in R$，$|z+ai|=1$，求 a 的值.

【答案】（1）$\bar{z}=-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$；（2）$a=\frac{4}{5}$ 或 $a=2$.

【解析】（1）因为 $z=\frac{2-3i}{1+2i}=\frac{(2-3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\frac{2-4i-3i+6i^2}{5}=\frac{-4-7i}{5}=-\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i$；

所以 $\bar{z}=-\frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$；

（2）因为 $z+ai=-\frac{4}{5}-\frac{7}{5}i+ai=-\frac{4}{5}+\left(a-\frac{7}{5}\right)i$，

所以 $|z+ai|=\sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2+\left(a-\frac{7}{5}\right)^2}=1$，解得 $a=\frac{4}{5}$ 或 $a=2$.

18. 为提高学生学习的数学的兴趣，南京港师范大学附属中学拟开设《数学史》、《微积分先修课程》、《数学

探究》、《数学建模》四门校本选修课程，甲、乙、丙三位同学打算在上述四门课程中随机选择一门进行学习，已知三人选择课程时互不影响，且每人选择每一门课程都是等可能的.

（1）求三位同学选择的课程互不相同的种数；

（2）求甲、乙两位同学不能选择同一门课程，求三人共有多少种不同的选课种数；

（3）若至少有两位同学选择《数学史》，求三人共有多少种不同的选课种数.

【答案】（1）$\frac{3}{8}$；（2）48；（3）10.

【解析】（1）三位同学选择的课程互不相同共有 $A_4^3=24$ 种情况；

（2）甲、乙两位同学不选择同一门课程共有 $A_4^2=12$ 种情况，丙有 4 种不同的选择，

所以甲、乙两位同学不能选择同一门课程共有 $12\times4=48$ 种情况；

（3）分两种情况讨论：①有两位同学选择《数学史》，共有 $C_3^2\times C_3^1=9$ 种不同的情况；

②有三位同学选择《数学史》共有 1 种情况.

综上所述，总共有 $9+1=10$ 种不同的选课种数.

19. 某地一所妇产科医院为了解婴儿性别与出生时间（白天或晚上）之间的联系，从该医院最近出生的 200 名婴儿获知如下数据：这 200 名婴儿中男婴的比例为 55%，晚上出生的男婴比白天出生的男婴多 75%，晚上出生的女婴人数与白天出生的男婴人数恰好相等.

（1）根据题意，完成下列 2×2 列联表；

出生时间 婴儿性别	白天	晚上	合计
男			
女			
总计			200

（2）根据列联表，判断能否有 99%的把握认为婴儿的性别与出生时间有关，说明你的理由.

附：$K^2=\frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$（$n=a+b+c+d$），参考数据：$\frac{19^2}{99^2}\approx 0.0368$.

$P(K^2\geqslant k)$	0.050	0.010	0.001

k	3.841	6.635	10.828

【答案】(1) 见解析 (2) 见解析

【解析】(1) 设白天出生的男婴有 a 名，晚上出生的男婴有 b 名，白天出生的女婴有 c 名，晚上出生的女婴有 d 名，则由已知得：

$$\begin{cases} a+b=200\times 55\% \\ b=a(1+75\%) \\ d=a \\ a+b+c+d=200 \end{cases}$$，解得 $a=40,b=70,c=50,d=40$

故完成下列 2×2 列联表，如下图所示：

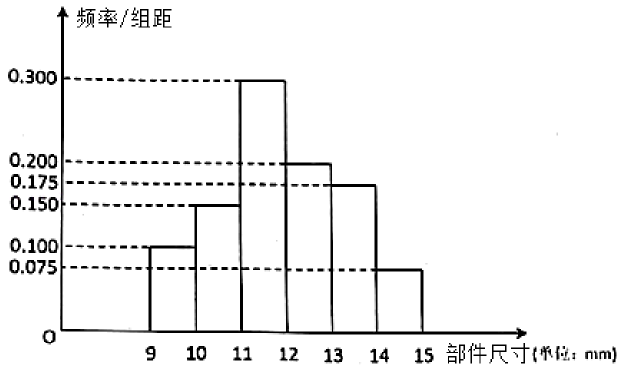
出生时间 婴儿性别	白天	晚上	合计
男	40	70	110
女	50	40	90
总计	90	110	200

(2) 由 (1) 中 2×2 列联表，得

$$K^2=\frac{200\times(40\times 40-70\times 50)^2}{110\times 90\times 90\times 110}=200\times\frac{19^2}{99^2}\approx 200\times 0.0368=7.36>6.635$$

所以有 99%的把握认为婴儿的性别与出生时间有关.

20. 为实现 2020 年全面建设小康社会，某地进行产业的升级改造. 经市场调研和科学研判，准备大规模生产某高科技产品的一个核心部件，目前只有甲、乙两种设备可以独立生产该部件. 如图是从甲设备生产的部件中随机抽取 400 件，对其核心部件的尺寸 $x$mm，进行统计整理的频率分布直方图. 根据行业质量标准规定，该核心部件尺寸 x 满足：$|x-12|\leqslant 1$ 为一级品，$1<|x-12|\leqslant 2$ 为二级品，$|x-12|>2$ 为三级品.



（1）现根据频率分布直方图中的分组，用分层抽样的方法先从这 400 件样本中抽取 40 件产品，若从这 40 件产品当中尺寸在[12，15]的产品中随机抽取 2 件产品，记 Y 为这 2 件产品中含有尺寸在[14，15]的产品个数，求 Y 的分布列和数学期望；

（2）为加大升级力度，厂家需增购设备. 已知这种产品的利润如下：一级品的利润为 500 元/件；二级品的利润为 400 元/件；三级品的利润为 200 元/件. 乙设备生产的产品中一、二、三级品的概率分别是 $\frac{2}{5}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{10}$，若将甲设备生产的产品的样本频率作为总体的概率. 以厂家的利润作为决策依据，应选购哪种设备？请说明理由.

【答案】（1）分布列见解析，$\frac{1}{3}$；（2）应选购乙设备..

【解析】（1）根据频率分布直方图中的分组，用分层抽样的分法抽取的 40 件产品中，

尺寸在 $[12,13)$，$[13,14),[14,15)$ 的产品数分别为 $8,7,3$，

所以随机变量 Y 的取值为 $0,1,2$，

则 $P(Y=0)=\frac{C_{15}^2}{C_{18}^2}=\frac{35}{51}$，$P(Y=1)=\frac{C_{15}^1C_3^1}{C_{18}^2}=\frac{5}{17}$，$P(Y=2)=\frac{C_3^2}{C_{18}^2}=\frac{1}{51}$，

所以随机变量 Y 的分布列为：

Y	0	1	2
P	$\frac{35}{51}$	$\frac{5}{17}$	$\frac{1}{51}$

所以期望 $E(Y)=0\times\frac{35}{51}+1\times\frac{5}{17}+2\times\frac{1}{51}=\frac{1}{3}$.

（2）设甲乙设备生产该产品一件的平均利润 y_1 元、y_2 元，

所以 $y_1=500\times\frac{1}{2}+400\times\frac{13}{40}+200\times\frac{7}{40}=415$，

$y_2=500\times\frac{2}{5}+400\times\frac{1}{2}+200\times\frac{1}{10}=420$

可得 $y_1>y_2$，所以应选购乙设备.

21. 已知函数 $f(x)=x^2-x-\ln x$.

（Ⅰ）求函数 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）若 x_1， x_2 是方程 $ax+f(x)=x^2-x(a>0)$ 的两个不同的实数根，求证： $\ln x_1+\ln x_2+2\ln a<0$.

【答案】（Ⅰ）单调递减区间是 $(0,1)$，单调递增区间是 $(1,+\infty)$；（Ⅱ）证明见解析.

【解析】(1) 依题意， $f'(x)=2x-1-\frac{1}{x}=\frac{2x^2-x-1}{x}=\frac{(2x+1)(x-1)}{x}$，

故当 $x\in(0,1)$ 时， $f'(x)<0$，当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $f'(x)>0$ ，

$\therefore$ $f(x)$ 单调递减区间是 $(0,1)$，单调递增区间是 $(1,+\infty)$ ；

(2) 因为 x_1， x_2 是方程 $ax+f(x)=x^2-x$ 的两个不同的实数根，

$\therefore\begin{cases}ax_1-\ln x_1=0\\ax_2-\ln x_2=0\end{cases}$，两式相减得 $a\left(x_1-x_2\right)+\ln\frac{x_2}{x_1}=0$，解得 $a=\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_2-x_1}$ ，

要证： $\ln x_1+\ln x_2+2\ln a<0$，即证： $x_1x_2<\frac{1}{a^2}$，即证： $x_1x_2<\left(\frac{x_2-x_1}{\ln\frac{x_2}{x_1}}\right)^2$ ，

即证 $\left(\ln\frac{x_2}{x_1}\right)^2<\frac{\left(x_2-x_1\right)^2}{x_1x_2}=\frac{x_2}{x_1}-2+\frac{x_1}{x_2}$ ，

不妨设 $x_1<x_2$，令 $\frac{x_2}{x_1}=t>1$，只需证 $\ln^2 t<t-2+\frac{1}{t}$，

设 $g(t)=\ln^2 t-t-\frac{1}{t}+2$，

$\therefore g'(t)=\frac{2}{t}\ln t-1+\frac{1}{t^2}=\frac{1}{t}\left(2\ln t-t+\frac{1}{t}\right)$，

令 $h(t)=2\ln t-t+\dfrac{1}{t}$，$\therefore h'(t)=\dfrac{2}{t}-1-\dfrac{1}{t^2}=-\left(\dfrac{1}{t}-1\right)^2<0$，

$\therefore h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，

$\therefore h(t)<h(1)=0$，$\therefore g'(t)<0$，$\therefore g(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 为减函数，

$\therefore g(t)<g(1)=0$．即 $\ln^2 t<t-2+\dfrac{1}{t}$ 在 $(1,+\infty)$ 恒成立，

$\therefore$原不等式成立，即 $\ln x_1+\ln x_2+2\ln a<0$．

22. 自爆发新型冠状病毒（$COVI\ D-19$）肺炎疫情以来，全国各地实行了最严格的疫情管控措施，潜江市还制定了每户3天才能出门一次的规定.很多网络购物平台为服务市民，在此期间推出了很多惠民抢购活动，深受广大市民欢迎.

（1）已知某购物平台自元月 $26\sim30$ 日共5天的成交额如下表：

日期	元月26日	元月27日	元月28日	元月29日	元月30日
时间变量 x	1	2	3	4	5
成交额 y（万元）	9	12	14	17	23

试求成交额 y（万元）与时间变量 x 的线性回归方程，并预测元月31日（时间变量 $x=6$）该平台的成交额.

（2）在2月1日前，小明同学　爸爸、妈妈准备在该网络购物平台上分别参加甲、乙两店各一个订单的抢购活动．小明同学的爸爸、妈妈在甲、乙两店订单抢购成功的概率分别为 p_1、p_2，小明同学的爸爸和妈妈抢购到的订单总数量为 ξ．

①求 ξ 的分布列及 $E(\xi)$；

②已知每个订单都由 $k\left(k\geq2,k\in N\right)$ 件商品构成，小明同学的爸爸和妈妈抢购到的商品总数量为 T，假设 $p_1=\dfrac{1}{e^{\frac{k}{4}}}$，$p_2=\dfrac{1}{k}$，求 $E(T)$ 取最大值时，正整数 k 的值.

附：回归方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距　最小二乘估计公式分别为 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．

【答案】（1） $y=3.3x+5.1$，预测元月 31 日成交额为 24.9 万元；（2）①分布列见解析，数学期望 $E(\xi)=p_1+p_2$；②4．

【解析】（1） $\overline{x}=\dfrac{1+2+3+4+5}{5}=3$，$\overline{y}=\dfrac{9+12+14+17+23}{5}=15$，

$\hat{b}=\dfrac{258-5\times3\times15}{55-45}=\dfrac{33}{10}=3.3$，$a=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=15-3.3\times3=5.1$．

故线性回归方程为 $y=3.3x+5.1$，当 $x=6$ 时，$y=24.9$，预测元月 31 日成交额为 24.9 万元；

（2）①ξ 可能取的值为 0、1、2，

$P(\xi=0)=(1-p_1)(1-p_2)$，$P(\xi=1)=p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2$，$P(\xi=2)=p_1p_2$，

ξ 的分布列为：

ξ	0	1	2
P	$(1-p_1)(1-p_2)$	$p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2$	p_1p_2

$E\xi=p_1(1-p_2)+(1-p_1)p_2+2p_1p_2=p_1+p_2$．

②$T=k\xi$，$E(T)=kE\xi=k(p_1+p_2)=\dfrac{k}{e^{\frac{k}{4}}}+1$，

令 $\varphi(k)=\dfrac{k}{e^{\frac{k}{4}}}+1$，则 $\varphi'(k)=\dfrac{4-k}{4e^{\frac{k}{4}}}$，

由 $\varphi'(k)>0$ 得 $2\le k<4$，由 $\varphi'(k)<0$ 得 $k>4$．

故 $\varphi(k)$ 在 $(2,4)$ 单调递增，在 $(4,+\infty)$ 单调递减．

所以当 $k=4$ 时，$\varphi(k)$ 取最大值，即 $k=4$ 时，$E(T)$ 取最大值．