

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期 高二数学

期末模拟试卷（2）

一、单选题：

1. 若 $a > b > 0$ ，则 ()

A. $ac^2 > bc^2$

B. $a^2 < ab < b^2$

C. $\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab}$

D. $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d \neq 0$ ，前 n 项和为 S_n ，若 $S_4 = 5a_2$ ，则 $\frac{S_9}{a_9} =$ ()

A. 9

B. 5

C. 1

D. $\frac{5}{9}$

3. “ $k < 1$ ”是“方程 $\frac{x^2}{3-k} + \frac{y^2}{k-1} = 1$ 表示双曲线”的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

4. 在平面直角坐标系 xOy 中，若椭圆 $C: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{m} = 1$ 与双曲线 $T: x^2 - \frac{y^2}{m} = 1$ 有相同的焦点，

则双曲线 T 的渐近线方程为

()

A. $y = \pm \frac{1}{2}x$

B. $y = \pm 2x$

C. $y = \pm \frac{1}{4}x$

D. $y = \pm 4x$

5. 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，直线 BC_1 与平面 A_1BD 所成角的余弦值为 ()

A. $\frac{\sqrt{2}}{4}$

B. $\frac{\sqrt{2}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

6. 已知衡量病毒传播能力的最重要指标叫做传播指数 RO 。它指的是，在自然情况下（没有外力介入，同时所有人没有免疫力），一个感染到某种传染病的人，会把疾病传染给多少人的平均数它的简单计算公式是： $RO = 1 + \text{确诊病例增长率} \times \text{系列间隔}$ ，其中系列间隔是指在一个传播链中，两例连续病例的间隔时间（单位：天）。根据统计，确诊病例的平均增长率为 40%，两例连续病例的间隔时间的平均数 5 天，根据以上 RO 数据计算，若甲得这种传染病，则 6 轮传播后由甲引起的得病的总人数约为 ()

A. 243

B. 248

C. 363

D. 1092

7. 已知抛物线 $x^2 = 4y$ 的焦点为 F ，准线为 l ， P 为抛物线上一点，过 P 作 $PA \perp l$ 于点 A ，当 $\angle AFO = 30^\circ$ (O 为坐标原点) 时， $|PF| =$ ()

A. $\frac{4}{3}$

B. $\frac{8}{3}$

C. 2

D. 3

8. 过点 $M(1, 0)$ 的直线 l 与椭圆 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 交于 A, B 两点, 若 $AM = 2MB$ 则直线 l 的斜率为 ()

- A. $\frac{\sqrt{14}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{14}}{7}$ C. $\pm \frac{\sqrt{14}}{2}$ D. $\pm \frac{\sqrt{14}}{7}$

二、多选题:

9. 已知关于 x 的不等式 $ax^2 + bx + c > 0$ 的解集为 $(-\infty, -2) \cup (4, +\infty)$, 则 ()

- A. $a > 0$ B. 不等式 $bx + c > 0$ 的解集为 $\{x | x < -4\}$
C. $a + b + c > 0$ D. 不等式 $cx^2 - bx + a < 0$ 的解集为 $\{x | x < -\frac{1}{4} \text{ 或 } x > \frac{1}{2}\}$

10. 若数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 且 $S_n = 2a_n - 2$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \log_2 a_n$, 则下列选项正确的为 ()

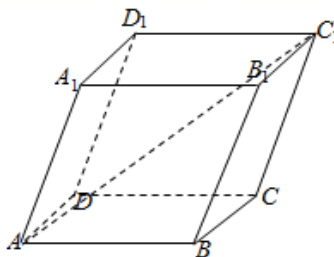
- A. 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列 B. $a_n = 2^n$
C. 数列 $\{a_n^2\}$ 的前 n 项和为 $\frac{2^{2n+1} - 2}{3}$ D. 数列 $\left\{\frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和为 T_n , 则 $T_n < 1$

11. 已知双曲线 $C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的实轴长是 2, 右焦点与抛物线 $C_2: y^2 = 8x$ 的焦点 F 重合, 双曲线 C_1 与抛物线 C_2 交于 A, B 两点, 则下列结论正确的是 ()

- A. 双曲线 C_1 的离心率为 $2\sqrt{3}$ B. 抛物线 C_2 的准线方程是 $x = -2$
C. 双曲线 C_1 的渐近线方程为 $y = \pm\sqrt{3}x$ D. $|AF| + |BF| = \frac{20}{3}$

12. 如图, 一个结晶体的形状为平行六面体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, 其中, 以顶点 A 为端点的三条棱长都等于 1, 且它们彼此的夹角都是 60° , 下列说法中正确的是 ()

- A. $(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})^2 = 2(\overrightarrow{AC})^2$
B. A_1 在底面 $ABCD$ 上的射影是线段 BD 的中点
C. AA_1 与平面 $ABCD$ 所成角大于 45°
D. BD_1 与 AC 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$



三、填空题:

13. 若命题 “ $\exists x \in \mathbb{R}$ 使 $x^2 + (a-1)x + 1 < 0$ ” 是假命题, 则实数 a 的取值范围为 _____

14. 定义各项为正数的数列 $\{p_n\}$ 的“美数”为 $\frac{n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}(n \in \mathbf{N}^*)$. 若各项为正数的数列 $\{a_n\}$ 的

“美数”为 $\frac{1}{2n+1}$, 且 $b_n = \frac{a_n+1}{4}$, 则 $\frac{1}{b_1 b_2} + \frac{1}{b_2 b_3} + \frac{1}{b_3 b_4} \cdots + \frac{1}{b_{2020} b_{2021}} =$ _____

15. 设 $a > 0, b > 0$, 且不等式 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{k}{a+b} \geq 0$ 恒成立, 则实数 k 的取值范围是_____

16. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右顶点为 A , 以 A 为圆心, b 为半径的圆与双曲线的一条渐近线交于 M, N 两点, 若 $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{ON}$ (其中 O 为坐标原点), 则双曲线的离心率为_____.

四、解答题

17. 已知集合 $A = \{x | -1 \leq x \leq 3\}$, 集合 $B = \{x | (x-a)(x-a-1) < 0\}, a \in \mathbf{R}$.

(1) 若“ $1 \in B$ ”是真命题, 求实数 a 取值范围;

(2) 若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要不充分条件, 求实数 a 的取值范围.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 是公比为2的等比数列, 其前 n 项和为 S_n ,

(1) 在① $S_1 + S_3 = 2S_2 + 2$, ② $S_3 = \frac{7}{3}$, ③ $a_2 a_3 = 4a_4$, 这三个条件中任选一个, 补充到上述题干中.

求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式, 并判断此时数列 $\{a_n\}$ 是否满足条件 P : 任意 $m, n \in \mathbf{N}^*$, $a_m a_n$ 均为数列 $\{a_n\}$ 中的项, 说明理由;

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = n \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^{n-1}, n \in \mathbf{N}^*$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

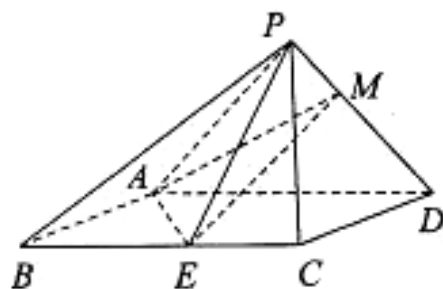
注: 在第(1)问中, 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

19. 如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形， $PA \perp PD$ ， $PA = PD$ ，平面 $PAB \perp$ 平面 PAD .

(1) 求证： $AB \perp$ 平面 PAD ；

(2) 若 M 是线段 PD 上的一点，且 $DM = 2MP$ ，

E 为 BC 上的一点， $BC = 2$ ，求三棱锥 $P-AEM$ 的体积.

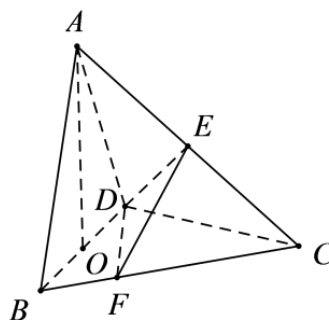


20. 在三棱锥 $A-BCD$ 中，已知 $CB = CD = \sqrt{5}$ ， $BD = 2$ ， O 为 BD 的中点，

$AO \perp$ 平面 BCD ， $AO = 2$ ， E 为 AC 的中点.

(1) 求直线 AB 与 DE 所成角的余弦值；

(2) 若点 F 在 BC 上，且 $BF = \frac{1}{4}BC$ ，设二面角 $F-DE-C$ 的大小为 θ ，求 $\sin \theta$ 的值.



21. 已知抛物线 $y^2 = -2px$ ($p > 0$) 的焦点为 F ， x 轴上方的点 $M(-2, m)$ 在抛物线上，且 $|MF| = \frac{5}{2}$ ，

直线 l 与抛物线交于 A, B 两点 (点 A, B 与 M 不重合)，设直线 MA, MB 的斜率分别为 k_1, k_2 。

(1) 求抛物线的方程；

(2) 已知 $k_1 + k_2 = -2$ ， $l: y = kx + b$ ，求 b 的值。

22. 如图，已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 过点 $\left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ，其的左、右顶点分别是 A, B ，下、上顶点

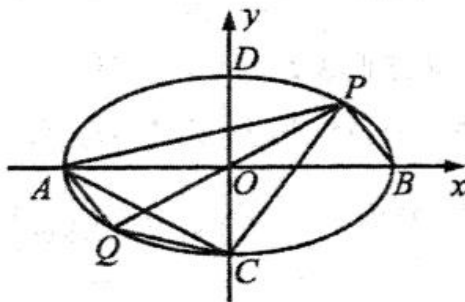
分别是 C, D ， P 是椭圆上第一象限内的一点，直线 PA, PB 的斜率 k_1, k_2

满足 $k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{4}$ 。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 过 P 点的直线 PO 交椭圆于另一点 Q ，

求四边形 $APCQ$ 面积的取值范围。



期末模拟试卷(2) 答案

一、单选题: CAAB CDAC

二、多选题: ABD BD BC BC

三、填空题: 13. $[-1, 3]$ 14. $\frac{2020}{2021}$ 15. $k \geq -4$ 16. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

四、解答题

17. (1) 若“ $1 \in B$ ”是真命题, 则 $-a(1-a) < 0$, 得 $0 < a < 1$.

$$(2) B = \{x | (x-a)(x-a-1) < 0\} = \{x | a < x < a+1\},$$

若“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要不充分条件, 则 B 是 A 的真子集,

即 $\begin{cases} a \geq -1 \\ a+1 \leq 3 \end{cases}$, 即 $\begin{cases} a \geq -1 \\ a \leq 2 \end{cases}$, 得 $-1 \leq a \leq 2$, 即实数 a 的取值范围是 $[-1, 2]$.

18 (1) 选①, 因为 $S_1 + S_3 = 2S_2 + 2$, 所以 $S_3 - S_2 = S_2 - S_1 + 2$, 即 $a_3 = a_2 + 2$,

又数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 所以 $4a_1 = 2a_1 + 2$, 解得 $a_1 = 1$, 因此 $a_n = 1 \times 2^{n-1} = 2^{n-1}$.

此时任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$, $a_m a_n = 2^{m-1} \cdot 2^{n-1} = 2^{m+n-2}$, 由于 $m+n-1 \in \mathbb{N}^*$, 所以 $a_m a_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的第 $m+n-1$ 项,

因此数列 $\{a_n\}$ 满足条件 P .

选②, 因为 $S_3 = \frac{7}{3}$, 即 $a_1 + a_2 + a_3 = \frac{7}{3}$, 又数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列,

所以 $a_1 + 2a_1 + 4a_1 = \frac{7}{3}$, 解得 $a_1 = \frac{1}{3}$, 因此 $a_n = \frac{1}{3} \times 2^{n-1}$.

此时 $a_1 a_2 = \frac{2}{9} < a_1 \leq a_n$, 即 $a_1 a_2$ 不为数列 $\{a_n\}$ 中的项, 因此数列 $\{a_n\}$ 不满足条件 P .

选③, 因为 $a_2 a_3 = 4a_4$, 又数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 所以 $2a_1 \times 4a_1 = 4 \times 8a_1$, 又 $a_1 \neq 0$, 故 $a_1 = 4$,

因此 $a_n = 4 \times 2^{n-1} = 2^{n+1}$. 此时任意 $m, n \in \mathbb{N}^*$, $a_m a_n = 2^{m+1} \cdot 2^{n+1} = 2^{m+n+2}$,

由于 $m+n+1 \in \mathbb{N}^*$, 所以 $a_m a_n$ 是数列 $\{a_n\}$ 的第 $m+n+1$ 项, 因此数列 $\{a_n\}$ 满足条件 P .

(2) 因为数列 $\{a_n\}$ 是公比为 2 的等比数列, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2$, 因此 $b_n = n \times 2^{n-1}$.

所以 $T_n = 1 \times 2^0 + 2 \times 2^1 + 3 \times 2^2 + \dots + n \times 2^{n-1}$,

则 $2T_n = 1 \times 2^1 + 2 \times 2^2 + \dots + (n-1) \times 2^{n-1} + n \times 2^n$,

两式相减得 $-T_n = 1 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} - n \times 2^n = \frac{1-2^n}{1-2} - n \times 2^n = (1-n)2^n - 1$,

所以 $T_n = (n-1)2^n + 1$.

19. 解: (1) 因为平面 $PAB \perp$ 平面 PAD , 平面 $PAB \cap$ 平面 $PAD = PA$,

$PD \subset$ 平面 PAD , $PA \perp PD$, 所以 $PD \perp$ 平面 PAB ,

又 $AB \subset$ 平面 PAB , 所以 $AB \perp PD$,

又因为 $AB \perp AD$, $AD \cap PD = D$, $AD, PD \subset$ 平面 PAD , 所以 $AB \perp$ 平面 PAD ;

(2) 因为 $BE \parallel AD$, $BE \not\subset$ 平面 PAD , $AD \subset$ 平面 PAD , 所以 $BE \parallel$ 平面 PAD ,

所以三棱锥 $E-PAM$ 的高等于点 B 到平面 PAD 的距离, 即 $BA = 2$,

所以 $S_{\Delta PAM} = \frac{1}{3} S_{\Delta PAD} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AP \times PD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} = \frac{1}{3}$,

所以三棱锥P-AEM的体积为 $V = \frac{1}{3} S_{\triangle PAM} \cdot BA = \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 2 = \frac{2}{9}$.

20 (1) 连 CO $\because BC = CD, BO = OD \therefore CO \perp BD$

以 OB, OC, OA 为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系, 则 $A(0, 0, 2), B(1, 0, 0), C(0, 2, 0), D(-1, 0, 0) \therefore E(0, 1, 1)$

$$\therefore \overrightarrow{AB} = (1, 0, -2), \overrightarrow{DE} = (1, 1, 1) \therefore \cos \langle \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE} \rangle = \frac{-1}{\sqrt{5}\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{15}}{15}$$

从而直线 AB 与 DE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$

(2) 设平面 DEC 一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$,

$$\therefore \overrightarrow{DC} = (1, 2, 0), \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DC} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \quad \text{令 } y = 1 \therefore x = -2, z = 1 \therefore \vec{n}_1 = (-2, 1, 1)$$

设平面 DEF 一个法向量为 $\vec{n}_2 = (x_1, y_1, z_1)$,

$$\therefore \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DB} + \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} = (\frac{7}{4}, \frac{1}{2}, 0), \begin{cases} \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DF} = 0 \\ \vec{n}_2 \cdot \overrightarrow{DE} = 0 \end{cases} \therefore \begin{cases} \frac{7}{4}x_1 + \frac{1}{2}y_1 = 0 \\ x_1 + y_1 + z_1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{令 } y_1 = -7 \therefore x_1 = 2, z_1 = 5 \therefore \vec{n}_2 = (2, -7, 5) \therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{-6}{\sqrt{6}\sqrt{78}} = -\frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$\text{因此 } \sin \theta = \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}$$

21 (1) 由题意, 抛物线 $y^2 = -2px (p > 0)$, x 轴上方的点 $M(-2, m)$ 在抛物线上,

根据抛物线的定义, 可得 $|MF| = \frac{p}{2} - (-2) = \frac{5}{2}$, 解得 $p = 1$, 所以抛物线的方程为 $y^2 = -2x$.

(2) 由 (1) 可知, 点 M 的坐标为 $(-2, 2)$, 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,

$$\text{联立方程组 } \begin{cases} y = kx + b \\ y^2 = -2x \end{cases}, \text{ 得整理 } k^2x^2 + (2kb + 2)x + b^2 = 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{-2kb - 2}{k^2}, \quad x_1x_2 = \frac{b^2}{k^2}, \quad \text{①}$$

$$\text{又因为 } k_1 + k_2 = \frac{y_1 - 2}{x_1 + 2} + \frac{y_2 - 2}{x_2 + 2} = -2,$$

$$\text{即 } (kx_1 + b - 2)(x_2 + 2) + (kx_2 + b - 2)(x_1 + 2) = -2(x_1 + 2)(x_2 + 2),$$

$$2kx_1x_2 + 2k(x_1 + x_2) + b(x_1 + x_2) - 2(x_1 + x_2) + 4b - 8 = -2x_1x_2 - 4(x_1 + x_2) - 8,$$

$$(2k + 2)x_1x_2 + (2k + b + 2)(x_1 + x_2) + 4b = 0,$$

$$\text{将①代入得, } b^2 - b - 2 - 2k(b + 1) = 0, \text{ 即 } (b + 1)(b - 2 - 2k) = 0$$

$$\text{解得 } b = -1 \text{ 或 } b = 2 + 2k,$$

$$\text{当 } b = -1 \text{ 时, 直线 } l: y = kx - 1, \text{ 此时直线恒过 } (0, -1);$$

$$\text{当 } b = 2 + 2k \text{ 时, 直线 } l \text{ 为 } y = kx + 2k + 2 = k(x + 2) + 2, \text{ 此时直线恒过 } (-2, 2) \text{ (舍去)}$$

$$\text{所以 } b = -1.$$

$$22 \text{ (1) 设 } P(x_0, y_0), \text{ 则 } k_1k_2 = \frac{y_0}{x_0 + a} \cdot \frac{y_0}{x_0 - a} = \frac{y_0^2}{x_0^2 - a^2}.$$

$$\text{又 } \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y_0^2 = \frac{b^2(a^2 - x_0^2)}{a^2}, \text{ 所以 } k_1k_2 = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{4}. \text{①}$$

$$\text{又由椭圆 } C \text{ 过点 } \left(1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ 得 } \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1, \text{ ②}$$

$$\text{由①②得 } a = 2, b = 1, \text{ 故椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

$$(2) A(-2, 0), C(0, -1), \text{ 设直线 } PQ \text{ 的方程为 } y = kx (k > 0), \text{ 则点 } A, C \text{ 到直线 } P, Q \text{ 的距离分别}$$

$$\text{为 } d_1 = \frac{2k}{\sqrt{k^2 + 1}}, d_2 = \frac{1}{\sqrt{k^2 + 1}}.$$

$$\text{又由 } \begin{cases} y = kx, \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases} \text{ 得 } P\left(\frac{2}{\sqrt{k^2 + 1}}, \frac{2k}{\sqrt{k^2 + 1}}\right), \text{ 所以 } |PQ| = 2|OP| = \frac{4\sqrt{1 + k^2}}{\sqrt{1 + 4k^2}}.$$

$$\text{四边形 } APQC \text{ 的面积 } S = \frac{1}{2}|PQ|(d_1 + d_2) = \frac{2(1 + 2k)}{\sqrt{1 + 4k^2}} = 2\sqrt{\frac{1 + 4k + 4k^2}{1 + 4k^2}} = 2\sqrt{1 + \frac{4}{\frac{1}{k} + 4k}}.$$

$$\text{由 } \frac{1}{k} + 4k \in [4, +\infty) \text{ 得 } S \in (2, 2\sqrt{2}].$$

$$\text{故四边形 } APCQ \text{ 面积的取值范围是 } (2, 2\sqrt{2}].$$