

江苏省仪征中学 2018-2019 学年第二学期期末复习讲义 (1)

- 函数 $y = \sqrt{\log_{0.5}(4x^2 - 3x)}$ 的定义域为_____. 【答案】 $[-\frac{1}{4}, 0) \cup (\frac{3}{4}, 1]$
- 函数 $y = \sqrt{4 - 2^x}$ 的值域为_____. 【答案】 $[0, 2)$
- 已知复数 $z = \frac{1+2i}{3-i}$, 其中 i 为虚数单位, 则复数 z 的虚部是_____. 【答案】 $\frac{7}{10}$
- 若 $\tan(\alpha - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{6}$, 则 $\tan\alpha$ 的值为_____. 【答案】 $\frac{7}{5}$
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 若曲线 $f(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$ (a, b 为常数) 过点 $P(2, -5)$, 且该曲线在点 P 处的切线与直线 $7x + 2y + 3 = 0$ 平行, 则 $a + b$ 的值是_____. 【答案】 -3
- 在 $\triangle ABC$ 中, 若 $\angle B = 30^\circ$, $AB = 2\sqrt{3}$, $AC = \sqrt{19}$, 则 $BC =$ _____. 【答案】 7
- 已知函数 $f(x) = a^x + x^2 - x \ln a$, 对任意的 $x_1, x_2 \in [0, 1]$, 不等式 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq a - 1$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为_____. 【答案】 $[e, +\infty)$
- 已知条件 $p: x < a$, 条件 $q: \frac{1-x}{x+2} \geq 0$. 若 $\neg q$ 是 $\neg p$ 的必要不充分条件, 则实数 a 的取值范围是_____. 【答案】 $(1, +\infty)$
- 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知点 M 为圆 $O: x^2 + y^2 = 36$ 上的一动点, $A(-3, 0)$, $B(4, 0)$, 则 $\sin \angle AMB$ 的最大值为_____.
【答案】 $\frac{7}{8}$
- 已知函数 $f(x) = \log_2(ax^2 + 2x + 3)$, 若对于任意实数 k , 总存在实数 x_0 , 使得 $f(x_0) = k$ 成立, 则实数 a 的取值范围是_____. 【答案】 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$
- 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}(-x+1), & -1 \leq x \leq t \\ -2|x-1|+1, & t < x \leq a \end{cases}$, 若存在实数 t , 使 $f(x)$ 的值域为 $[-1, 1]$, 则实数 a 的取值范围是_____. 【答案】 $(1, 2]$
- 已知函数 $f(x) = 2^{x-1} + a$, $g(x) = bf(1-x)$. 其中 $a, b \in R$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \geq g(x)$ 的解的最小值为 2 , 则 a 的取值范围是_____. 【答案】 $a \leq -2, a > -\frac{1}{4}$
- 已知复数 z 满足 $|3 + 4i| + z = 1 + 3i$.
(1) 求 $\bar{z}$; (2) 求 $\frac{(1+i)^2(3+4i)}{z}$ 的值.
【答案】 解: (1) 因为 $|3 + 4i| = 5$,
所以 $z = 1 + 3i - 5 = -4 + 3i$,
所以 $\bar{z} = -4 - 3i$;
(2) $\frac{(1+i)^2(3+4i)}{z} = \frac{2i(3+4i)}{-4+3i} = 2$.

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos A = \frac{4}{5}$, $\tan(A-B) = -\frac{1}{2}$.

(1) 求 $\tan B$ 的值;

(2) 求 $\sin 2C$ 的值.

14. 解: (1) 因为 $\cos A = \frac{4}{5}$, A 为锐角, 所以 $\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \frac{3}{5}$, 所以 $\tan A = \frac{3}{4}$2 分

所以 $\tan B = \tan[A - (A-B)] = \frac{\tan A - \tan(A-B)}{1 + \tan A \tan(A-B)} = 2$6 分

(2) 由 (1) 知, $\tan B = 2$, B 为锐角, 所以 $\sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}$8 分

所以 $\cos C = -\cos(A+B) = -\cos A \cos B + \sin A \sin B = \frac{2}{5\sqrt{5}}$,10 分

$\sin C = \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{11}{5\sqrt{5}}$12 分

所以 $\sin 2C = 2 \sin C \cos C = \frac{44}{125}$14 分

15 已知函数 $f(x)$ 为定义在 R 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = \log_2 x$. 函数 $g(x) = 2 \log_2(2x + a)$, $a \in R$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 若对 $\forall x \in [\frac{1}{4}, \frac{9}{4}]$, $f(16x) \geq g(x)$, 求实数 a 的取值范围;

(3) 设 $a > -2$, 求函数 $h(x) = g(x) - f(x)$, $x \in [1, 2]$ 的最小值.

解: (1) $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\log_2(-x), & x < 0 \end{cases}$

$$(2) \because \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4} \right], f(16x) \geq g(x),$$

$$\therefore \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4} \right], f(16x)_{\min} \geq g(x)_{\max},$$

$$\begin{aligned} \therefore \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4} \right], f(16x) &= \log_2(16x) \\ &= \log_2 16 + \log_2 x \\ &= 4 + \log_2 x \\ &\geq 4 + \log_2 \frac{1}{4} \\ &= 2, \end{aligned}$$

$$\therefore \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4} \right], f(16x)_{\min} = 2,$$

$$\therefore \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4} \right], g(x) = 2 \log_2(2x + a) \leq 2 \log_2 \left(\frac{9}{2} \right).$$

$$\therefore \forall x \in \left[\frac{1}{4}, \frac{9}{4} \right], g(x)_{\max} = 2 \log_2 \left(\frac{9}{2} + a \right).$$

$$\therefore 2 \log_2 \left(\frac{9}{2} + a \right) \leq 2$$

$$\therefore \begin{cases} \frac{9}{2} + a > 0 \\ \frac{9}{2} + a < 2 \end{cases}, \text{解得 } -\frac{9}{2} < a < -\frac{5}{2},$$

$$\therefore \text{实数 } a \text{ 的取值范围是 } \left(-\frac{9}{2}, -\frac{5}{2} \right).$$

$$(3) \because a > -2, x \in [1, 2],$$

$$\therefore h(x) = g(x) - f(x) = 2 \log_2(2x + a) - \log_2 x = \log_2$$

$$\because y = \log_2 x \text{ 是增函数,}$$

$$\therefore -2 < a < 0 \text{ 时, } 2 + \frac{a}{x} \text{ 是增函数}$$

$$\therefore \left[\log_2 \left(2 + \frac{a}{x} \right) \right]_{\min} = \log_2(2 + a),$$

$$a = 0 \text{ 时, } \left[\log_2 \left(2 + \frac{a}{x} \right) \right]_{\min} = \log_2 2 = 1,$$

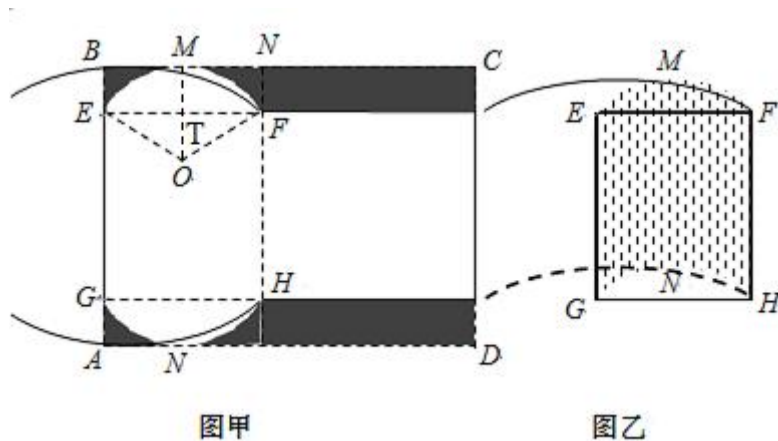
$$a > 0 \text{ 时, } 2 + \frac{a}{x} \text{ 是减函数}$$

$$\therefore \left[\log_2 \left(2 + \frac{a}{x} \right) \right]_{\min} = \log_2 \left(2 + \frac{a}{2} \right).$$

16. 有一矩形硬纸板材料(厚度忽略不计), 一边 AB 长为 6 分米, 另一边足够长. 现从中截取矩形 $ABCD$ (如图甲所示), 再剪去图中阴影部分, 用剩下的部分恰好能折卷成一个底面是弓形的柱体包装盒(如图乙所示, 重叠部分忽略不计), 其中 $OEMF$ 是以 O 为圆心、 $\angle EOF = 120^\circ$ 的扇形, 且弧 $\widehat{EF}$, $\widehat{GH}$ 分别与边 BC , AD 相切于点 M , N .

(1) 当 BE 长为 1 分米时, 求折卷成的包装盒的容积;

(2) 当 BE 的长是多少分米时, 折卷成的包装盒的容积最大?



【答案】解：(1)在图甲中，连接 MO 交 EF 于点 T ，设 $OE = OF = OM = R$ ，

在 $Rt_{\triangle OET}$ 中，因为 $\angle EOT = \frac{1}{2}\angle EOF = 60^\circ$ ，

所以 $OT = \frac{R}{2}$ ，则 $MT = OM - OT = \frac{R}{2}$ 。

从而 $BE = MT = \frac{R}{2}$ ，即 $R = 2BE = 2$ 。

故所得柱体的底面积 $S = S_{\text{扇形}OEF} - S_{\triangle OEF} = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin 120^\circ = \frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}$ ，

又所得柱体的高 $EG = 4$ ，

所以 $V = S \times EG = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ 。

答：当 BE 长为 1(分米)时，折卷成的包装盒的容积为 $\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$ 立方分米。

(2)设 $BE = x$ ，则 $R = 2x$ ，所以所得柱体的底面积

$S = S_{\text{扇形}OEF} - S_{\triangle OEF} = \frac{1}{3}\pi R^2 - \frac{1}{2}R^2 \sin 120^\circ = (\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3})x^2$ ，

又所得柱体的高 $EG = 6 - 2x$ ，

所以 $V = S \times EG = (\frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3})(-x^3 + 3x^2)$ ，其中 $0 < x < 3$ 。

令 $f(x) = -x^3 + 3x^2$ ， $0 < x < 3$ ，

则由 $f'(x) = -3x^2 + 6x = -3x(x - 2) = 0$ ，

解得 $x = 2$ 。

列表如下：

x	$(0,2)$	2	$(2,3)$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	增	极大值	减

所以当 $x = 2$ 时， $f(x)$ 取得最大值。

答：当 BE 的长为 2 分米时，折卷成的包装盒的容积最大。

17. 已知函数 $f(x) = \frac{ax}{x+b}$ ，且 $f(1) = 1$ ， $f(-2) = 4$ 。

(1) 求 a 、 b 的值；

(2) 当 $x \in [1,2]$ 时，不等式 $f(x) \leq \frac{2m}{(x+1)|x-m|}$ 恒成立，求实数 m 的取值范围；

(3) 设函数 $h(x) = \frac{k(x+1) \cdot f(x)}{8(x^2+4)}$, $x \in [2, +\infty)$, 函数 $g(x) = \frac{1}{2}^{|x-k|}$, $x \in (-\infty, 2)$, 若对任意 $x_1 \in [2, +\infty)$,

总存在唯一的 $x_2 \in (-\infty, 2)$, 使得 $h(x_1) = g(x_2)$, 求实数 k 的取值范围.

解: (1) $\begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$

(2) $|x-m| \neq 0$

$\therefore 0 < m < 1$ 或 $m > 2$

$m \frac{x-1}{x} \leq x \leq m \frac{x+1}{x}$

① $x \in \{1\} \therefore \frac{1}{2} \leq m < 1$ 或 $m > 2$

② $x \in (1, 2]$

$$\begin{cases} m \leq \left(\frac{x^2}{x-1} \right)_{\min} \\ m \geq \left(\frac{x^2}{x-1} \right)_{\max} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{4}{3} \leq m \leq 4 \\ 0 < m < 1 \text{ 或 } m > 2 \end{cases}$$

$\therefore 2 < m \leq 4$

综上: $2 < m \leq 4$

(2) 设 $h(x)$ 值域为 A , $g(x)$ 的值域为 B , $\therefore A \subseteq B$

① $k \leq 0 \quad A = \left[\frac{k}{16}, 0 \right)$ 不满足要求;

② $k > 0 \quad A = \left(0, \frac{k}{16} \right]$

a) $k \geq 2 \quad B = (0, 2^{2-k})$

b) $k < 2 \quad B = (0, 1]$

综上: $4 > k > 0$

18、已知圆 $M: x^2 + (y-2)^2 = 1$, 直线 $l: x-2y=0$, 点 P 在直线 l 上, 过点 P 作圆 M 的切线 PA , PB , 切点为 A , B .

(1) 若点 P 的坐标为 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 过点 P 作直线与圆 M 相切, 求此切线方程;

(2) 求证: 经过 A , P , M 三点的圆必过定点, 并求出所有定点的坐标;

(3) 求弦 AB 长的最小值.

解析: (1) 当直线斜率不存在时, 切线方程为 $x=1$; 当直线斜率存在时, 设直线方程为 $y=k(x-1)+\frac{1}{2}$,

所以圆心 $M(0, 2)$ 到切线的距离 $d=\frac{\left|k+\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{k^2+1}}=1$, 解得 $k=-\frac{5}{12}$, 所以 $y=-\frac{5}{12}x+\frac{11}{12}$, 所以切线方程为 $x=1$ 或 $y=-\frac{5}{12}x+\frac{11}{12}$.

(2) 设点 $P(2m, m)$, 则 MP 的中点 $Q\left(m, \frac{m}{2}+1\right)$.

因为 PA 是圆 M 的切线,

所以经过 A, P, M 三点的圆是以 Q 为圆心, 以 MQ 为半径的圆,

故圆的方程为 $(x-m)^2+\left(y-\frac{m}{2}-1\right)^2=m^2+\left(\frac{m}{2}-1\right)^2$,

化简得 $x^2+y^2-2y-m(2x+y-2)=0$, 此式是关于 m 的恒等式,

故 $\begin{cases} x^2+y^2-2y=0, \\ 2x+y-2=0, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} x=0, \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\frac{4}{5}, \\ y=\frac{2}{5} \end{cases}$,

所以经过 A, P, M 三点的圆必过定点 $(0, 2)$ 和 $\left(\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\right)$.

(3) 设点 $P(2y, y)$, 且 PM 与 AB 交于点 K ,

则 $1^2=MK \cdot PM$, 即 $MK=\frac{1}{PM}$.

$AB=2\sqrt{1-\frac{1}{PM^2}}=2\sqrt{1-\frac{1}{5y^2-4y+4}}$,

当 $y=\frac{2}{5}$ 时, 弦 AB 最小为 $\frac{\sqrt{11}}{2}$.