班级_____姓名_______日期______

微专题　构造不等关系求离心率范围

研考题·聚焦切口

例1　已知椭圆的中心在原点 O 处，右焦点为 F，右准线为 l，若在 l 上存在点 M，使线段 OM 的垂直平分线经过点 F，则椭圆的离心率的取值范围是________.

【思维引导】离心率的范围实质为一个不等关系，如何构建这种不等关系？可以利用长度和垂直平分线性质构建.

变式　已知椭圆 C_1：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 与圆 C_2：$x^2+y^2=b^2$，若在椭圆 C_1 上存在点 P，使得由点 P 所作的圆 C_2 的两条切线互相垂直，则椭圆 C_1 的离心率的取值范围是________.

例2　已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上一点 A 关于原点 O 的对称点为 B，F 为其右焦点，若 $AF\perp BF$，设$\angle ABF=\alpha$，且 $\alpha\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{4}\right]$，则椭圆离心率的取值范围是________.

◀总结提升▶

离心率的范围问题是高考的热点问题，如何找到关于“a,c”的不等关系式是问题的关键，常用的处理方法和技巧有：

1. 借助平面几何图形中的不等关系：根据平面图形的关系，如三角形两边之和大于第三边、折线段大于或等于直线段等，将这些量结合曲线的几何性质用 a,b,c 进行表示.

2. 借助题目中给出的不等信息：根据试题本身给出的不等条件，如已知某些量的范围，存在点或直线使方程成立等，进一步得到离心率的不等关系式.

3. 借助函数的值域求范围：根据题设条件，如曲线的定义、等量关系等条件建立离心率和其他一个变量的函数关系式，通过确定函数的定义域后，利用函数求值域求解离心率的范围.

4. 根据椭圆或双曲线自身的性质求范围：在求离心率的范围时有时常用椭圆或双曲线自身的性质，如椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$中，$-a\leqslant x\leqslant a$，$P$ 是椭圆上任意一点，则 $a-c\leqslant PF_1\leqslant a+c$ 等.

固能力·触类旁通

1. 设 $a>1$,则双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{(a+1)^2}=1$ 的离心率 e 的取值范围是________.

2. 已知过椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点 A 且斜率为 k 的直线交椭圆 C 于另一个点 B,且点 B 在 x 轴上的射影恰好为右焦点 F,若$\frac{1}{3}<k<\frac{1}{2}$,则椭圆 C 的离心率的取值范围是________.

3. 已知椭圆 C_1:$\frac{x^2}{m+2}-\frac{y^2}{n}=1$ 与双曲线 C_2:$\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{n}=1$ 有相同的焦点,则椭圆 C_1 的离心率 e 的取值范围为________.

4. 已知两定点 $A(-2,0)$和 $B(2,0)$,动点 $P(x,y)$在直线 l:$y=x+3$ 上移动,椭圆 C 以 A,B 为焦点且经过点 P,则椭圆 C 的离心率的最大值为________.

5. 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点为 F,若过点 F 且倾斜角为$60°$的直线与双曲线的右支有且只有一个交点,则此双曲线的离心率的取值范围是________.

6. 设 F_1,F_2 为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点,且 $F_1F_2=2c$,若椭圆上存在点 P,使得 $PF_1\cdot PF_2=2c^2$,则椭圆的离心率的最小值为________.

7. 已知 F_1,F_2 分别为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点,$P$ 为双曲线右支上的任意一点,若$\frac{PF_1^2}{PF_2}$的最小值为 $8a$,则双曲线的离心率 e 的取值范围是________.

8. 设椭圆 C:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,其焦距为 $2c$,点 $Q\left(c,\frac{a}{2}\right)$在椭圆的外部,点 P 是椭圆 C 上的动点,且 $PF_1+PQ<\frac{5}{3}F_1F_2$ 恒成立,则椭圆离心率的取值范围是________.

9. 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点分别为 F_1,F_2,如果椭圆上存在点 P,使$\angle F_1PF_2=90°$,则椭圆离心率 e 的取值范围为________.

10. 已知中心在原点的椭圆与双曲线有公共焦点,左、右焦点分别为 F_1,F_2,且两条曲线在第一象限的交点为 P,$\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形,若 $PF_1=12$,椭圆与双曲线的离心率分别为 e_1,e_2,则 e_1e_2+1 的取值范围是________.