

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

周三练习 (3)

一、单项选择题 (本大题共 4 小题, 共 20 分)

1. 若 $a > b > 0$, $c < d < 0$, 则一定有 (D)

A. $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$ B. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$ C. $\frac{a}{d} > \frac{b}{c}$ D. $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$

2. 设等差数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和为 S_n , 若 $S_2=4$, $S_3=9$, 则 S_5 的值是 (D)

A. 15 B. 30 C. 13 D. 25

3. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2+a_3=6$, 则 $\frac{S_6}{S_3} =$ (B)

A. 8 B. 9 C. 10 D. 11

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$, $a_n - a_{n+1} = \frac{a_n a_{n+1}}{n(n+1)}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 则 a_{10} 的值是 (C)

A. $\frac{2}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{10}{19}$ D. $\frac{5}{2}$

二、多项选择题: 本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 3 分, 有选错的得 0 分.

5. 已知 $a > 0$, $b > 0$, 且 $a+b=1$, 则 (ABD)

A. $a^2+b^2 \geq \frac{1}{2}$ B. $2^{a-b} > \frac{1}{2}$ C. $\log_2 a + \log_2 b \geq -2$ D. $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 2$

6. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公差为 d . 已知 $a_3=12$, $S_{12}>0$, $a_7<0$, 则 (ABCD)

A. $a_6 > 0$

B. $-\frac{24}{7} < d < -3$

C. $S_n < 0$ 时, n 的最小值为 13

D. 数列 $\{\frac{S_n}{a_n}\}$ 中最小项为第 7 项

三、填空题 (本大题共 4 小题)

7. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_2+a_3=6$, 则 $\frac{S_6}{S_3} =$ 9.

8. 若 $\log_4(3a+4b) = \log_2 \sqrt{ab}$, 则 $a+b$ 的最小值是 $7+4\sqrt{3}$.

9. 等比列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_1=1$, $4a_2$, $2a_3$, a_4 成等差数列, 则 $a_1a_7=$ 64 .

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 有最大值, 且 $\frac{a_{2021}}{a_{2020}} < -1$, 则满足 $S_n > 0$ 的最大正整数 n 的值为 4040

四、解答题 (本大题共 2 小题, 共 22 分)

11. (10 分)

数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+n-1$.

(1) 求证: 数列 $\{a_n+n\}$ 为等比数列;

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解: (1) 证明: 根据题意, $a_{n+1}=2a_n+n-1$, 则 $a_{n+1}+n+1=2a_n+n-1+n+1=2a_n+2n=2(a_n+n)$

$$\text{所以 } \frac{a_{n+1}+n+1}{a_n+n} = 2,$$

所以数列 $\{a_n+n\}$ 为等比数列.

(2) 由 (1) 得数列 $\{a_n+n\}$ 为以 2 为公比的等比数列,
又 $a_1=1$, 所以 $a_1+1=2$.

所以 $a_n+n=2 \cdot 2^{n-1}=2^n$, 所以 $a_n=2^n-n$.

12. (12 分)

已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $4S_n = (a_n+1)^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 是等差数列, 并求其通项公式;

(2) 设 $b_n = a_n + 2^{a_n}$, 求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

解: (1) 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $4S_n = (a_n+1)^2$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

当 $n=1$ 时, 解得 $a_1=1$.

由 $4S_n = (a_n+1)^2$ 和 $4S_{n+1} = (a_{n+1}+1)^2$ 两式相减, 得: $4a_{n+1} = (a_{n+1}+1)^2 - (a_n+1)^2$,

整理得 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-2)=0$.

所以 $a_{n+1}-a_n=2$,

故数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项, 2 为公差的等差数列,

所以: $a_n=2n-1$.

(2) 由于 $b_n = a_n + 2^{a_n} = 2n-1 + 2^{2n-1}$,

所以 $T_n = (1+3+\cdots+2n-1) + (2^1+2^3+\cdots+2^{2n-1})$,

$$= \frac{n(1+2n-1)}{2} + \frac{2(4^n-1)}{4-1},$$

$$= \frac{2^{2n-1} + 3n^2 - 2}{3}.$$