

共振和自激振荡——关于虎门大桥

原创 [同济量子力学](#) [同济量子力学](#) 5月7日

“鉴于虎门大桥的摇摆问题，网上出现了很多的解释。但是误传的解释也太多。所以需要从严谨的科学角度给以说明。这类情况的发生不是共振，而是自激振荡！”

开篇

一夜之间，人们对虎门大桥摇摆的文章报道就有 200 多万次。说明人们对于国计民生都很重视，到目前，专家们给出的结论也在不断的修改中，大桥也仍然没有开通使用。作为科技工作者，只能给大家普及一下这类问题的科学知识，也算尽一份绵薄之力。

什么是自激振荡？

一种循环运转的机器仅仅依靠从环境中吸收热量并将其转化为有用的功来运行，是不可能的。显然，来自环境的能量可能流入机器，使它做有用的工作。例如，溪流中的水使磨坊的轮子转动，

燃烧煤炭产生的热量为蒸汽机提供动力。自激振荡就是一种重要的外能源驱动的特殊运动，其特征是外界给它提供能量，但它们自己的运动控制着外部能源来驱动它们的相位。因此，在某种意义上，它们是自我驱动的（但不是自我供能的）。

以一个简单的例子来说明什么是自激振荡。假设有一根两端开口的长管，呈长方体，其长比宽和高都大得多，其中一端的一侧被紧绷的柔性膜所取代。如图 1 所示。在没有空气通过管道的情况下，膜平衡于水平位置 H。实验发现，当管中有稳定气流通过，膜的平衡位置在略低于 H 的位置处。如果开始膜在 A 下面的 B 处，空气会把膜推出来。如果膜位于 A 之上的 C，它会被拉进来。因此，打开气流可能会导致薄膜在平衡位置 A 点的稳定振荡状态。为什么 A 的振动不会受到摩擦和空气阻力的影响？这在很早以前就被研究了。Airy 对此建模一个振子，其中部分恢复力依赖于较早时的位移 q ：

$$d^2q/dt^2 = -aq(t) - bq(t-c)$$

利用一阶微扰理论，他发现，在 $0 < b \ll a, 0 < ca^{1/2} < \pi$ 情况下，振荡的振幅在每个周期后都会增大——“永动机”。显然，该振子的能量不守恒，因为延迟力 $-b \cdot q(t-c)$ 不能被表示为任何势能 $V(q)$ 的导数。这就解释了为什么振子的动能在它通过 $q=0$ 的平衡位置的一段时间内可以更大，就像在第一类永动机中一样。

延迟作用的效应

如果 $b = 0$, 恢复力过平衡点就改变符号。但如果 $0 < b \ll a$ 和 $0 < \omega \sqrt{a} < \pi$, 那么当振子通过 $q = 0$ 时, 延迟力在一段时间内仍不改变它的符号, 因此会将振荡器推离平衡状态。振荡的振幅越大, 这种推力就越大。因此, 这种延迟振荡器的运动可以理解为一个正反馈的实例: 振荡器驱动自己, 导致振幅指数增长。这个正反馈在 $\omega \sqrt{a} = \pi/2$ 是最大的, 因为延迟力总是和振子运动的方向同向。

当 c 很小时, , 模型方程可泰勒展开为负阻尼线性振动方程:

负阻尼相应于作用力与速度同相。振子运动得越快, 它在运动方向上受到的推力就越大, 振荡器就不断地从周围环境中吸收能量。振荡的振幅随时间呈指数增长, 直到它变得如此之大以致非线性效应变得相关, 并以某种方式决定了一个有限的振幅。这就是一个有规律的自激振荡。在正反馈最大时, 即是 c 并不小, 运动方程也可以简化为负阻尼线性振动方程, 只是

受迫共振

在受迫共振的情况下, 阻尼是正的, 在运动方程的右边有一个与时间相关的驱动项:

当驱动频率和振子的本征频率匹配时（不一定相等！），振子产生最大振幅的振荡。这时，即使在线性系统中，谐振子的振幅也只有在阻尼消失的情况下才会发散。此外，无阻尼强迫谐振器的振幅随时间呈线性发散，而不像线性自振器的振幅呈指数发散。

流致不稳定性

许多描述都将自激振荡与强迫共振现象混淆。最臭名昭著的例子是1940年华盛顿州塔科马海峡悬索桥的倒塌。当它坠落时，这座桥暴露在68公里/小时的强风中。在那样的风速下，考虑到桥的尺寸，斯特劳哈尔（Strouhal）湍流旋涡脱落的频率约为1hz，因此不可能迫使桥发生频率约为0.2 Hz的振荡。

所谓“斯特劳哈尔频率”，即当稳定的风绕过圆形障碍物时，湍流旋涡的脱落频率是Strouhal通过实验发现的，对直径d的张紧绳子，处于风速为v时，绳子振荡频率近似满足 $fd/v \approx 0.2 + 4/R + O(1/R^2)$ ，其中 $R=(vd)/\nu$ 是雷诺数（ ν 是流体的运动粘度）。

<http://en.wikipedia.org/wiki/File:Vortex-street-animation.gif>.

图2：速度v的体在遇到直径为d的圆形障碍物时产生的湍流旋涡——“卡门涡街”。斯特劳哈尔实验发现，旋涡的脱落频率服从“斯特劳哈尔频率”。

工程师们都知道，塔科马海峡悬索桥事故最早由华盛顿大学的F. B. Farquharson和加州理工的T. von Kármán和L. G. Dunn主持调查。得到的结论：该桥的突变振荡是由流动引起的不稳定，即意思它是由固体运动与流体动力的耦合所引起的。“疾驰”现象是由桥的振动和

周围气流中湍流涡的形成之间的反馈引起的，这些涡流反过来又推动了桥的运动，造成了小振动的负阻尼。这和强迫谐振很不一样，因为振子(桥)对强迫项(风)没有反作用力。

伦敦千禧人行桥(London Millennium Footbridge)的大幅度横向摇摆也是一种自激振荡。当行人试图沿着摇摆的桥笔直行走时，他们(相对于桥)与摇摆相反移动，从而对桥施加了与振荡速度相位一致的力。具有低频、侧向振动模式、行人负载与总质量之比足够大的人行桥，通常容易受到这种不稳定性的影响。

海浪是另一种形式的自激振荡，因为它们有一个确定的波长，但其产生根源是稳定的风的作用。亥姆霍兹和开尔文曾明，当两种流体在平行方向上的相对速度超过一定的阈值时，它们之间的分离面就会变得线性不稳定。钱德拉塞卡详细讨论了这种“开尔文-亥姆霍兹不稳定性”。分离面沿法线方向的扰动振幅数增长，直到受到非线性的限制，就像我们提到的其他负阻尼系统一样。这就是风在水面上产生波浪的方式。

类似的由流动引起的自激振荡包括输电线路和其他薄物在大风中的抖动，以及在全速运行时不受支撑的花园软管的振动。其实很多自激振荡都被大家误认为是共振现象，比如：各种弓弦乐器、管乐器以及人类心脏的运动。

结语

总而言之：自激振荡情况下，环境必须提供足够的能量来维持振荡，但不需要调整外部速率来产生一个大的周期运动，振荡器本身设置其驱动的频率和相位。也就是说自激振荡系统相当于一个有源振荡器，而受迫振荡是无源的，主要外力驱动，其频率和外驱动频率要达到匹配，才会共振。

现在你知道怎么区分共振和自激振荡了吗？你认为专家说的虎门大桥的摇摆是维修放置的水马造成的影响合适吗？