

依托主题教学 发展数学素养^①

——从北京中、高考压轴题谈起

李大永

(北京市海淀区教师进修学校数学教研室 100195)

1 问题提出

多年以来,北京市中、高考试题最后一道压轴题都是以新概念为基础来研究和探索问题的形式考查学生数学思维的能力.这已经成为北京中、高考试卷的一个具有标志性的特征.这种试题首先以课标中的内容为载体,用下定义的方式给出一类数学对象的概念,然后分多个梯度设问,创设一个新的数学情境,由浅入深,引导考生从初步感知概念到深入理解概念、再到应用概念解决相关问题.问题给每个考生提供了充分发挥自己数学思维能力的空间,能够很好的展现考生多年数学学习形成的数学素养的水平.从备考研究来看,并不乏对高考压轴题的相关文章,但大多停留在针对压轴题的解题分析与讲解训练的策略上,鲜有将考题测评目标和日常课程内容的课堂教与学关联起来,进行深层次的教学反思与研究.尽管大家都认可“解决中、高考压轴题需要高水平数学素养”,但是在日常课程内容的教学中如何发展学生数学素养,还缺少有效的途径和方法.本文从解决北京中、高考的压轴题的思维过程入手,分析数学思维方式的特征,剖析数学核心素养各要素在解题过程中的具体表现,由此来关联主题教学的特征和要素,探讨如何依托主题教学来促进学生数学素养的发展.

2 北京中、高考压轴题的解题分析

2.1 中考试题解析

(2013年北京中考卷25题)对于平面直角坐标系 xOy 中的点 P 和 $\odot C$,给出如下定义:若 $\odot C$ 上存在两个点 A, B ,使得 $\angle APB = 60^\circ$,则称 P 为

$\odot C$ 的关联点.

已知点 $D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), E(0, -2), F(2\sqrt{3}, 0)$.

(1)当 $\odot O$ 的半径为1时,

①在点 D, E, F 中, $\odot O$ 的关联点是_____;

②过点 F 作直线 l 交 y 轴正半轴于点 G ,使 $\angle GFO = 30^\circ$,若直线 l 上的点 $P(m, n)$ 是 $\odot O$ 的关联点,求 m 的取值范围;

(2)若线段 EF 上的所有点都是某个圆的关联点,求这个圆的半径 r 的取值范围.

思路剖析

本题是围绕概念“关联点”的理解来创设问题,(1)①是基于所定义概念表达的对象内涵特征来辨识具体的点,找出哪些点是给定圆的关联点.实际上,题目中所给的三个点,每一个点都是一类点的代表: D 为圆内一般点, E 和 F 分别为圆外的坐标轴上的点,通过尺规工具的测量操作即可做出判断.

(1)②是基于概念的定义所表达的内涵特征的发展性理解,对所给直线上的一般的点进行推理确认.因此,该小问解决的关键是能否基于概念的定义获得概念的发展性理解,也就是要经由如下思维过程:基于定义通过观察①中具体的点或者自己再行举例尝试,直觉判断定圆的关联点在形态分布上的几何特征,并作出抽象、概括和猜测,然后进行深入分析和逻辑推理,逻辑确认这一猜测的正确性,揭示出定圆的关联点的分布规律——半径为1的 $\odot O$ 的关联点构成的图形是 $\odot O$ 的半径为2的同心圆(含圆周)圆面.在这个

① 基金项目“北京市中小学名师发展工程”(项目编号:PXM2015-014255-000070)

思维过程中,既需要直观想象也需要逻辑推理. 有两个进路可以推进理解:对于给定的点 P ,暂时舍弃 60° 的条件限制,考察两点 A, B 在圆上的运动,发现 $\angle APB$ 的大小是变化的,当 PA, PB 是圆的切线时, $\angle APB$ 张开到最大值;暂时舍弃圆上点的限制,考察以 P 为顶点的 60° 角的两边,绕顶点 P 旋转起来,只要角的两边与定圆有交点时,既符合要求. 不管是哪一个进路,最终都聚焦到关联点分布的边界状态,此时角的两边与定圆相切. 从上述的分析可以发现,直观想象与基于圆的相关知识的逻辑推理是协同进行的. 此外,在一个涉及多个要素的关系的考查中,为了便于研究,需要适当控制变量,即,要先确定或暂时舍弃某些要素,来考察另一些要素的变化的影响,这属于数学思维活动的经验范畴.

(2)是从反方向的角度运用对概念的发展性理解,由给定的关联点的所在图形反向确定圆的半径取值范围. 该问的解决,需要把②对概念获得的发展性理解进行一般化,这相当于经由概念的理解发现或推演出概念所界定的研究对象的性质:点 P 是半径为 r 的 $\odot C$ 的关联点的充要条件是 $PC \leq 2r$. 把这个性质定理直观化理解,即,对于两个同心圆(半径是二倍关系),大圆的圆内及圆周上的点集=小圆的关联点的点集.

当然,该问题的解决,除了对“关联点”概念的理解,还涉及其它相关知识,如直角三角形、图形与坐标、锐角三角函数等,此外还有一个容易被忽视的难点——数学语言的理解与表达. 例如对概念中“存在”的理解,第三问“若线段 EF 上的所有点都是某个圆的关联点”的理解.

2.2 高考试题解析

(2016年高考北京卷理20)设数列 $A: a_1, a_2, \dots, a_N (N \geq 2)$. 如果对小于 $n (2 \leq n \leq N)$ 的每个正整数 k 都有 $a_k < a_n$, 则称 n 是数列 A 的一个“G时刻”. 记 $G(A)$ 是数列 A 的所有“G时刻”组成的集合.

(I)对数列 $A: -2, 2, -1, 1, 3$, 写出 $G(A)$ 的所有元素;

(II)证明:若数列 A 中存在 a_n 使得 $a_n > a_1$, 则 $G(A) \neq \emptyset$;

(III)证明:若数列 A 满足 $a_n - a_{n-1} \leq 1 (n = 2, 3, \dots, N)$, 则 $G(A)$ 的元素个数不小于 $a_N - a_1$.

思路剖析

与中考题的压轴题相似,本题同样有一个核心概念,整个题目是围绕数列的“G时刻”这一概念的理解而创设的.(I)是要求基于“G时刻”的定义的表述,找出一个具体数列的所有“G时刻”,这一问题的解决是对“G时刻”概念的具体感知.

(II)是证明一个数列存在“G时刻”的充分条件. 需要从具体感知上升到一般性规律的发现,在通过(I)中对概念获得的具体感知的基础上,从直觉上已经可以感知:数列 A 存在一个“G时刻”意味着存在一项 a_n 大于其之前的所有项,当然有 $a_n > a_1$. 但反之成立吗? 感觉在逻辑上是存在障碍的,回到(I)中的具体例子去观察,发现只有第一个大于 a_1 的项 a_n 就一定是“G时刻”对应的项,而“存在 a_n 使得 $a_n > a_1$ ”,对于数列而言,当然就存在第一个 $a_k > a_1$,至此,结论成立的理由可以阐释清楚了.

(III)中“数列 A 满足 $a_n - a_{n-1} \leq 1 (n = 2, 3, \dots, N)$ ”相当于又定义了一类特殊的数列 A ,要求考查这类数列的“G时刻”的个数与末项和首项的差的关系. 所以本小问的解决,不仅要求对“G时刻”概念有更深刻的理解,还要对这类数列的相关性质有一定的理解. 在反思解决(II)的基础上,对概念“G时刻”可以进一步获得自我语义层面解释性的理解,把数列直观化,将各项想象成是随着项数 n 的变化而上下起伏跳跃的点,那么,对于第一个“G时刻”而言,是首次高于首项对应的点;从第二个“G时刻”开始,它是首个出现高于前一个“G时刻”对应的点. 对于数列 A ,定义它的相邻项关系不是等量关系,这种相对泛化的不等关系,使得数列 A 的性质特征也是模糊不清的,这对认识数列 A 带来了困难. 考虑到本问的任务是“G时刻”个数,所以不妨将关注点由数列 A 的所有项转移到“G时刻”对应的那些项,我们将这些项和首项作为一个新的数列来考虑,记作 $a_1, a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_p}$,对于这个数列,由“G时刻”概念内涵可得到如下性质: $a_1 < a_{n_1} < a_{n_2} < \dots < a_{n_p}$; $a_{n_p} - a_1 \geq a_N - a_1$. 由 $a_n - a_{n-1} \leq 1$ 和“G时刻”概念内涵可发现 $a_{n_k} - a_{n_{k-1}} \leq 1$, 所以可得 $a_{n_p} - a_1 \leq p$. 综合上述性质不难得到 $p \geq a_N - a_1$.

3 北京中、高考压轴题的教学导向分析

中、高考分别是初、高中阶段的结果性测评,

是立足于考生数年数学学习所获得的数学素养水平的考查,作为中、高考的压轴题,它关注的不仅是这个学段的知识,更是长期的数学学习中所积淀形成的数学思维的习惯与方式、数学思维活动的经验和数学的文化与精神,所以,如果仅是就题论题式来进行备考,重心仍在应试,事实上这就是仅关注斯根普所说的对知识的工具性理解,而不关注关系性理解,那么怎么能发展数学素养呢?具体而言,从上述两个考题的思路剖析可以发现,考题的测评目标是“要求考生在新的情景下,通过阅读抽象的数学符号,理解新引入的概念,从中挖掘研究对象的数学性质,并用精炼的数学语言呈现推理证明的过程,这需要考生具有良好的数学素养和学习能力。”良好的数学素养和学习能力,显然不可能由短期的针对性训练来完成,因此,中、高考试题的教学导向是在平时的数学课程的学习活动之中关注并落实发展学生数学素养。

要发展学生数学素养,就要关注良好的数学思维方式与习惯的养成。那么,什么是数学的思维方式呢?北大数学系丘维声教授把它概括成:观察客观现象,从中抓住主要特征,抽象出概念或建立模型;然后进行探索,探索时常用的是直觉判断、归纳、类比和联想;探索后可以做出某种猜想,但是需要证明,这要进行深入分析、逻辑推理和计算,往往要付出艰辛的劳动;之后才可以揭示出事物的内在规律。这就是数学思维方式的全过程。回忆数学课程中每一个主题内容所呈现的内在结构,基本上是按着上述的数学思维方式呈现的研究脉络展开的。对于每一个主题内容,都有一个核心的概念,它明确界定了本主题的核心研究对象,整个主题的内容就是围绕对核心概念理解的不断深化而展开的,展开的基本模式为:概念中涉及的要素(已有概念)的分析——挖掘内部各要素间关系的规律——关联其它相关要素,发现概念内、外要素间关系的规律。

回顾上述解决两个考题的思维过程,可以发现它们呈现出高度的一致性。这些思维活动在平时的课程学习中本应该是反复经历的,那为什么学生没有能够从平时的学习中获得这些思维方式与经验呢?原因可能就在于学生并没有经历这样的思维过程。

4 实施主题教学是落实数学素养发展的重要途径

目前课堂中采用的基本上还是传统的教学方式,它是以“目标——达成——评价”的方式来规划设计的,知识与技能是实质上的优先事项,将单元内容按知识点拆分成课时内容,设立课时目标,围绕目标达成设计教学活动,并评价课时知识与技能的达成,依据反馈改进调整教学。这必然导致知识的碎片化,缺乏知识的内在联系性,学习行为上,偏向事实性知识的记忆和单一操作技能的训练,难以形成对单元主题的整体性和结构性的理解,更难以体验和感悟蕴含在主题内容中的数学思想观念和数学思维方式,这无法实现核心素养的发展,也造成了目前学生在面对中、高考压轴题呈现的新情景问题时,难以形成问题解决的思路。为了避免“课时主义”把教学内容碎片化,需要增强对课程的全局性把握——即在全局中去把握一课时的教学,这就需要以主题式教学的方式来组织和实施课程。2017版高中课标通过附录中的案例36,指出了主题教学的整体设计包括以下几个步骤:确定主题内容;分析教学要素;编制主题教学目标;设计主题教学流程;评价、反思及修改。

4.1 什么是主题教学

主题教学这一概念的英文表达包括“thematic instruction”、“theme study”、“unit teaching”、“the project method”、“theme — bases instruction”、“projectbased learning”等,在主题教学的内涵上,侧重各不相同。在国内随着课改的推进,对主题教学也有广泛的研究,有主题教学、单元整体教学、深度学习等相关提法,虽然词汇表达方式略有差异,但都是含有或突出主题教学的意思。目前,主题教学没有公认的统一界定,本文立足数学核心素养发展的课程目标,将主题教学的内涵界定如下:主题教学是以系统论为基础,指向学生的素养发展,从学科本质出发,基于整体课程观分析确定学习主题,基于认知规律,聚焦数学基本思想和观念的感悟和数学活动经验的形成,围绕学习主题对课程的内容进行组织、实施与评价的一种教学模式。具体而言,它围绕主题中的核心概念或思想方法,构建核心问题,来整合多种资源,组织创设主题下相关知识发生发展的境脉,在经

历数学活动的全景过程中,发展学生的学科思维品质、关键能力以及情感、态度与价值观.

4.2 主题教学的核心特征

从主题教学的上述内涵,主题教学具有如下几个核心特征:

(1) 教学内容理解的整体性

主题教学强调“统观全局,处理局部”,是在课程内容的全局中规划课时教学计划.对课程内容的理解把握,包含如下几个方面:主题内容的数学本质、数学文化以及所渗透的数学思想等、在本学段数学课程中的地位、在整个中小学数学课程中的地位和作用、在数学整体中的地位、与本学段、前后学段以及大学其他知识之间的联系.这是做好主题教学的前提与基础,只有做好主题内容的整体化理解,才能弄清楚每堂课的教学内容在数学整体的知识系统中的地位与价值,理解该数学知识所蕴含的数学思想和观念,这样才不至于使数学教学变得支离破碎.

(2) 三维目标的整合性

季辛教授认为知识有四个层面:事实性知识、概念性知识、方法性知识和价值性知识,因为所有知识都是人类创造的,必然是在人类需要(一定的价值取向的驱使下)的时候创造的,而每一个创造都产生于特定的方法以及概念和原理,每一个创造在本质上都是一定价值取向、方法、概念和原理的事实.传统的双基教学过于关注理性和知识灌输,而真正的教育不仅要包含理性学习,也应包含直觉和情感学习,我们常常误以为学习是始于大脑的认知系统,而实际上是始于人的自我系统(由态度、信念、情感和价值观构成).所以三维目标是对传统学科教育观的一次超越,是学科教育开始关注人的核心素养的发展.由于主题教学是围绕主题的核心概念或思想方法来规划整体教学方案,将主题内容研究的核心问题嵌入情境之中,是以“主题——探究——经验——表达”的方式来设计课程,着眼于组织“探究”、“表现”、“交流”、“反思”的活动,这更有利于实现三维目标的自然整合,这确保了主题教学的素养发展指向.

例如,初中的一元二次方程,如果教师是围绕“如何求解一元二次方程?”来设计组织“探究”、“表现”、“交流”、“反思”的活动,就要把学生对这个问题的学习情感、态度放在重要的位置来考虑.

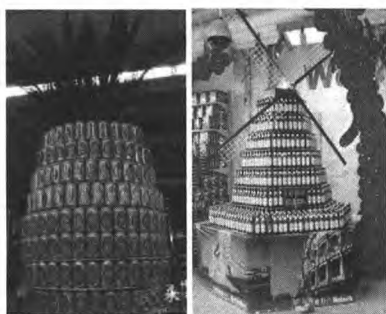
在指导海淀区育英学校张洁老师参加全国教学比赛时,建议将原来的针对方程中三个参数列表分类讨论求解,改为让学生回忆一元二次方程的概念并在黑板上写出一个一元二次方程的例子,要求后写的同学不同于前面所写的方程,然后提出问题:你会求解其中的哪些方程呢?是怎样求解的?求解方法背后的依据是什么?观察不会求解的方程与会求解的方程在形式上有何区别?可否把会求解的方程所用的方法用到那些刚才不会求解的方程上去?……,这样的设计,就是将学生的自我系统放在活动设计的前提性基础地位,教师不是硬要教给学生什么,而是观察分析学生,通过组织学生的表达与分享交流,帮助学生基于自身的所知、所能使其显性化和清晰化,从而发现和认识隐藏在这些特殊方程求解背后的数学原理,并用它去解决不会的方程.

(3) 以学生的学为中心构建活动

主题教学是围绕主题的核心概念的持续理解展开教学的,它需要抓住主题内容待研究的核心问题,创设适当的情境,主题内容是在问题的探究过程中发现和形成的.因此,主题教学设计的重心是学生的学习活动的构建,包括学生对问题的探究、学习表现、交流反思等活动.教师的教的重心是支持学生的学习活动,例如倾听、观察学生获得学生的认知、情感、态度等信息,以构建支架促进学生探究发现意义、思考表达、交流反思、经验累积,要引领学生聚焦在富含教育价值的学习活动中.主题教学过程中,学生要亲身经历和体验数学活动的全景性过程,这有助于落实课标的四基要求,提高学生的综合性思维品质.学生在中、高考压轴题的解决中的困难:不会或不善于逻辑清晰的数学表达的问题、不能理解对实际背景的应用题的题意和进行数学化、缺乏由概念发现和推演出概念所界定的对象的丰富性质并用其解决新异问题的意识、经验和能力……,自然就会在平时的主题学习中得以改善或解决.

例如,高中的数列主题,作为教师应该知道其价值所在,数列与级数是共生的概念,级数是研究微积分的重要工具.所以在数列主题的教学要围绕“数列求和”这一核心问题设计学习活动(尽管求数列的通项也是一个重要的问题,但是因为它可以视为描述离散现象的特殊函数,这一价值

可放在函数视野下来看),可以通过给出一组求和问题(如商品的摆放造型、棋盘上的麦粒数量等)让学生去解决,活动的重点不在于学生完成求和任务,而在于观察和倾听学生对“一列数求和”的思维进展及想法,根据情况适当构建支架——回忆以前多个数字相加求和的经历或举例,引导学生认识到数列求和本质上是化简计算,化简的关键在于分析并发现各个加数的特征与关系,所以求和方法自然取决于运算对象——数列的通项的性质.由此引出并形成数列、数列通项和数列求和的概念.这样也就为后续的基本数列——等差数列和等比数列的待研究问题与研究路径预设了框架.

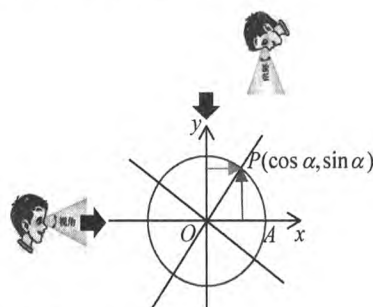


(4) 学习活动凸显概念学习

丘维声认为数学学习的核心任务就是学习数学的思维方式,从丘教授阐释的数学的思维方式内涵可以看到其本质上是“玩概念”的,概念是数学内容中最核心也是最基础的内容,所有的数学命题要么是概念的性质,要么是概念间的关系.“玩概念”的基本路径:在数学的范畴中,观察客观现象,提出要研究的问题,通过比较、概括等方法提取事物的本质特征,抽象形成必要的概念,在概念的基础上,运用直觉、分析、归纳、类比、联想、推理等方法探索并猜想出事物的内在规律,给予严格的逻辑证明,之后那些重要的结论便形成了定理,最后是运用定理去解决问题.而主题教学的单元课程设计就恰恰体现了“玩概念”的基本路径,这不仅有利于促进学生建立核心概念的意象(concept image,即,与这个概念相关的整个认知结构,其中包括所有相关的心理表征、性质和过程,这个概念由 Vinner 和 Tall 提出),更为重要的是,还会促使学生形成概念意象的必要经验.

例如,高中必修内容三角函数主题,可以围绕本主题核心概念——三角函数概念的理解展开主

题教学,以“摩天轮”为问题源,以抽象出的“匀速圆周运动中的变量关系”为研究的核心问题,在问题的研究过程和解决认知冲突中获得新知识,在发现规律中获得新知识,逐渐展开全章内容.这样的主题学习过程,能够清晰的建立正、余弦三角函数的如下概念意象:单位圆,其上的质点在逆时针做匀速圆周运动时,描述质点在纵轴和横轴上的投影点相对原点 O 的位置变化变量 y 和 x 与描述质点旋转的变量角的依赖关系.这样,同角三角函数关系式、诱导公式、三角函数的性质等概念性知识,还有三角函数的描述周期现象以及联系旋转与平移运动的方法性知识,都可以结合圆的几何特性牢固地建立在这一概念意象上了,当然随着主题学习的推进,还会进一步丰富其概念意象,如三角函数图象等.



(5) 教学内容展开的非线性

主题教学是围绕主题的核心概念与思想观念的持久性理解展开的,是以学生的学为中心创设学习活动和支撑学习的课堂环境氛围,这就决定了主题教学的课时规划具有动态生成性.在主题教学的设计阶段,要考虑到学生的不同的认知和学习态度、情感等学情状况,所以设计主题学习活动必然是非线性的,有多种展开路径,而在实施过程中需要根据学生的学习活动进展情况及时做出适当调整.这种非线性的课程架构可以在一定程度上缓解因班级学生差异化带来的教学困境.因为主题教学采用“主题——探究——经验——表达”的课程架构,其中的问题的情境与场景、学生之间的互动、交流与表达可以给不同水平的学生提供各自的学习参与活动和发展空间,课堂更具有包容性.

例如,初中的锐角三角函数主题,其核心思想——直角三角形的边之比与角存在对应关系,整个主题的设计围绕核心思想的理解进程、情境

构建6个研究问题:①所给情境中的测高(底部不可达)任务是怎样的?②逻辑确认“发现的边角关联的规律是真的吗?③如何方便地获得任意锐角的三角函数值?④锐角三角函数让你对直角三角形的可解性条件有了哪些新的认识?⑤为了完成首课情境中的测高任务,你的测量及计算方案是怎样的?⑥锐角三角函数概念还可以运用到哪里去?除了①和⑥两个问题并没有严格的线性顺序,在海淀区中关村中学的杨爱青老师的教学实践中,首课之后的每节课要研究的问题,就是遵从多数同学的想法来决定的。

主题教学的推进,显然是不能一蹴而就的,就如同学生的学习需要渐进的过程一样,教师的教学改进也是如此,在实践的探索中,它需要经历种种的困惑、冲突、感悟、发现、否定—肯定一再否定的过程,逐渐产生外至行为内至观念的演变、深化、重塑。在发展数学素养的教学探索上永无止境。希望更多的有志教师能够参与到主题教学的实践探索中来。

参考文献

- [1] 王雅琪. 核心素养导向的高中数学考试评价探索与思考——从2016年高考数学北京卷20题谈起[J]. 数学通报, 2017, 56(4): 44-47
- [2] 丘维声. 代数学的发展与数学的思维方式[J]. 数学通报, 2006, 45(12)
- [3] 佐腾学. 学习的快乐——走向对话[M]. 钟启泉, 译. 北京: 教育科学出版社, 2004: 118-123
- [4] 钟启泉. 课堂研究[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2016: 115
- [5] 吕世虎, 杨婷, 吴振英. 数学单元教学设计的内涵、特征以及基本操作步骤[J]. 当代教育与文化, 2016(7): 41-45
- [6] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2017: 173
- [7] 李大永, 章红. 基于整体把握的运算主线下的“分数指数幂”教学[J]. 数学教育学报, 2016(2)
- [8] 季苹. 教什么知识——对教学的知识论基础的认识[M]. 北京: 教育科学出版社, 2009: 86
- [9] 鲍建生, 周超. 数学学习的心理基础与过程[M]. 上海: 上海教育出版社, 2009: 59
- [10] 李大永. 基于数学思想方法的理解整体设计三角函数的教学[J]. 数学通报, 2015, 54(5)
- [11] 刘秉哲. 初级中学算术[M]. 北平: 著者书店, 1933
- [12] 骆师曾. 复兴初级中学教科书 算术(上册)[M]. 上海: 商务印书馆, 1933
- [13] 王刚森, 王氏. 初中算术(下册)[M]. 上海: 世界书局, 1934
- [14] 骆师曾, 骆氏. 初中算术(上册)[M]. 上海: 世界书局, 1934
- [15] 周为群, 刘薰宇, 章克标, 仲光然. 开明算学教本 算术(下册)[M]. 上海: 开明书店, 1935
- [16] 陆子芬, 孙振惠, 石濂水. 初中算术(上册)[M]. 上海: 中华书局, 1935
- [17] 蔡泽安. 初中新算术(上册)[M]. 上海: 世界书局, 1937
- [18] 张幼虹. 实验初中算术[M]. 上海: 建国书局, 1941
- [19] 王桂荣, 余信符. 建国初中算术[M]. 上海: 正中书局, 1943
- [20] 许莼荪. 初中数学补习用书 算术[M]. 上海: 中华书局, 1945
- [21] 魏怀谦. 新编初中算术(上册)[M]. 上海: 中华书局, 1947
- [22] 国立编译馆, 蔡德注. 初级中学 算术(上册)[M]. 上海: 中华书局, 1948
- [23] 代钦. 数学教育与数学文化[M]. 呼和浩特: 内蒙古教育出版社, 2013
- [24] 李迪. 中国数学史简编[M]. 沈阳: 辽宁人民出版社, 1984
- [25] 李文林. 数学史概论(第二版)[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010
- [26] 林夏水. 数学哲学[M]. 北京: 商务印书馆, 2003
- [27] [古希腊]柏拉图. 理想国[M]. 北京: 商务印书馆, 1995
- [28] 李继闵. 算法的源流——东方古典数学的特征[M]. 北京: 科学出版社, 2007
- [29] 课程教材研究所. 20世纪中国中小学课程标准·教学大纲汇编(数学卷)[M]. 北京: 人民教育出版社, 2001
- [30] 张奠宙. 分数定义[J]. 小学教学(数学版), 2010(1)
- [31] 代钦. 中国中学数学函数概念百年演变考[J]. 数学通报, 2011(7)
- [32] 徐章韬. 分数历史发展过程中认识视角的变迁及其教学意蕴[J]. 湖南教育, 2010(4)
- [33] 贺晓恒. 从分数的历史看分数的教学[J]. 湖南教育, 2007(5)
- [34] 徐品方, 张红. 数学符号史[M]. 北京: 科学出版社, 2006
- [35] 王光明, 李健, 康玥媛. 小学数学教材中分数意义的呈现: 历史顺序与“超回归”倒序的统一[J]. 课程·教材·教法, 2017(5)
- [36] 章敏. 关于分数教学的思考[J]. 课程·教材·教法, 2015(3)
- [37] 范文贵. 分数的内涵有多大?——兼谈小学分数的教学[J]. 人民教育, 2011(7)

(上接第12页)