# 江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学周三练习（2）理科

2018. 9. 12

**范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆 、圆锥曲线、不等式**

**一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.**

1．已知集合 A＝{－2，－1，3，4}，B＝{－1，2，3}，则 A∩B＝________.

2．命题“∃x∈(0，＋∞)，ln x＝x－1”的否定是___________ .

3．若复数 z 满足(z－1)i＝－1＋i，其中 i 是虚数单位，则复数 z 的模是____________.

4．若函数 $f(x)=\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)$($\omega$>0)的最小正周期为 π，则 $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$的值是________.

5．过点 $P(6,-1)$，在 $x$ 轴、 $y$ 轴上的截距分别为 $a$、$b$，且满足 $a=3b$ 的直线方程为______________.

6．直线 $l$ 的斜率 $k=x^2+1(x\in R)$，则直线 $l$ 的倾斜角 $\alpha$ 的范围为___________.

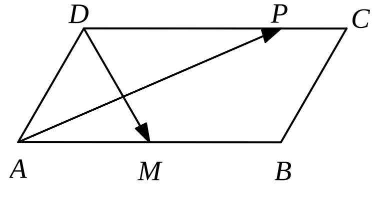
7．“直线：$x+(a-1)y+1=0$ 与直线：$ax+2y+2=0$ 平行”的充要条件是______ .

8．△$ABC$ 中，$A$、$B$、$C$ 是其内角，若 sin 2$A$＋sin($A$－$C$)－sin $B$＝0，则△$ABC$ 的形状是________________三角形.

9. 在平面直角坐标系 $xOy$ 中，已知过点 $M(1,1)$的直线 $l$ 与圆$(x+1)^2+(y-2)^2=5$ 相切，且与直线 $ax+y-1=0$ 垂直，则实数 $a$=__________.

10．在锐角三角形 $ABC$ 中，$BC=1$，$B=2A$， $AC$ 的取值范围是_________。

11．如图，在平行四边形 ABCD 中，已知 $AB$＝2，$AD$＝1，∠$DAB$＝60°，点 $M$ 为 $AB$ 的中点，点 $P$ 在 $CD$ 上运动（包括端点），则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{DM}$ 的取值范围是__________.



12．已知函数 $f(x)=\begin{cases} lnx+e^x-3，x\geq 1 \\ x^2+ax+2，x<1 \end{cases}$ 有且仅有 2 个零点，则 $a$ 的范围是___________.

13．已知 $a>0$，函数 $f(x)=(a+1)x^2-x+\sin x+a-2$，$x\in\mathrm{R}$．记函数 $f(x)$的值域为 $M$，函数 $f(f(x))$ 的值域为 $N$，若 $M\subseteq N$，则 $a$ 的最大值是____________.

14．设函数 $f(x)=ax+\sin x+\cos x$．若函数 $f(x)$的图象上存在不同的两点 $A$，$B$，使得曲线 $y=f(x)$在点 $A$，$B$ 处的切线互相垂直，则实数 $a$ 的取值范围为_________.

**二、解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.**

15. 已知向量 $\mathbf{m}=(\cos\alpha，-1)$，$\mathbf{n}=(2，\sin\alpha)$，其中 $\alpha\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，且 $\mathbf{m}\perp\mathbf{n}$.

(1) 求 $\cos 2\alpha$ 的值； (2) 若 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，且 $\beta\in\left(0，\frac{\pi}{2}\right)$，求角 $\beta$.

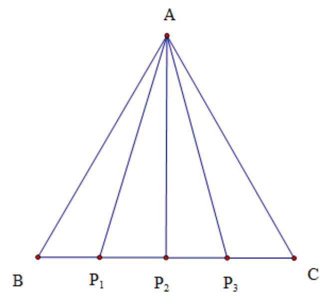
16. 设函数 $f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{6})-\cos\frac{\pi}{4}x$.

（1）求 $f(x)$ 的单调增区间； （2）若 $x\in(0,4)$，求 $y=f(x)$ 的值域.

17. 设$\Delta ABC$是边长为$4$的正三角形，点$P_1,P_2,P_3$四等分线段$BC$（如图所示）

（1）$P$为边$BC$上一动点，求$\vec{PA}\cdot\vec{PC}$的取值范围？

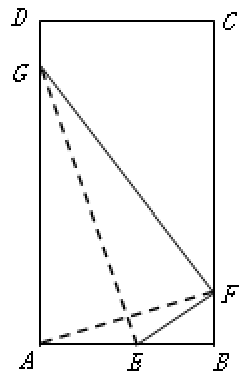
（2）$Q$为线段$AP_1$上一点，若$\vec{AQ}=m\vec{AB}+\frac{1}{12}\vec{AC}$，求实数$m$的值.




18. 如图所示，有一块矩形空地$ABCD$，$AB=2$ km，$BC=4$ km，根据周边环境及地形实际，当地政府规划在该空地内建一个筝形商业区$AEFG$，筝形的顶点$A,E,F,G$为商业区的四个入口，其中入口$F$在边$BC$上（不包含顶点），入口$E,G$分别在边$AB,AD$上，且满足点$A,F$恰好关于直线$EG$对称，矩形内筝形外的区域均为绿化区.

（1）请确定入口$F$的选址范围；

（2）设商业区的面积为$S_1$，绿化区的面积为$S_2$，商业区的环境舒适度指数为$\frac{S_2}{S_1}$，则入口$F$如何选址可使得该商业区的环境舒适度指数最大？



第 18 题图

19. 已知函数 $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax$.

（1）若曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2,f(2))$ 处的切线的斜率为 $-6$，求实数 $a$；

（2）若 $a=1$，求 $f(x)$ 的极值；

（3）当 $0<a<2$ 时，$f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $-\frac{16}{3}$，求 $f(x)$ 在该区间上的最大值.

20. 已知函数 $f(x)=x-\ln x$ ，$g(x)=x^2-ax$.

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $[t,t+1](t>0)$ 上的最小值 $m(t)$；

(2) 令 $h(x)=g(x)-f(x)$，$A(x_1,h(x_1))$，$B(x_2,h(x_2))(x_1\neq x_2)$ 是函数 $h(x)$ 图像上任意两点，且满足 $\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>1$，求实数 $a$ 的取值范围；

(3) 若 $\exists x\in(0,1]$，使 $f(x)\geq\frac{a-g(x)}{x}$ 成立，求实数 $a$ 的最大值.

# 数学周三练习（2）理科**参考答案** 2018.9.12

**一、填空题：**

1． {－1，3}　　2． ∀x∈(0，＋∞)，ln x≠x－1　　3． $\sqrt{5}$　　4． $\frac{1}{2}$

5． $y=-\frac{1}{3}x+1$ 或 $y=-\frac{1}{6}x$　　6． $[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})$　　7． $a=-1$　　8． 等腰或直角　　9． $\frac{1}{2}$

10． $\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$　　11． $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　12． $a=2\sqrt{2}$或 $a<-3$　　13． 2　　14． [－1，1]

**二、解答题：**

15.解：(1)（解法 1)由 m⊥n 得，2cosα －sinα ＝0，sinα ＝2cosα ，(2 分)

代入 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，$5\cos^2\alpha=1$，且 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，

则 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，(4 分)

则 $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-1=-\frac{3}{5}$.(6 分)

(解法 2)由 $m\perp n$ 得，2cosα －sinα ＝0，tanα ＝2，(2 分)

故 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-4}{1+4}=-\frac{3}{5}$.(6 分)

(2) 由 $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，$\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$得，$\alpha-\beta\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

因 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，则 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{3\sqrt{10}}{10}$.(9 分)

则 $\sin\beta=\sin[\alpha-(\alpha-\beta)]=\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\sin(\alpha-\beta)=\frac{2\sqrt{5}}{5}\times\frac{3\sqrt{10}}{10}-\frac{\sqrt{5}}{5}\times\frac{\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.(12 分)

因 $\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，得 $\beta=\frac{\pi}{4}$.(14 分)

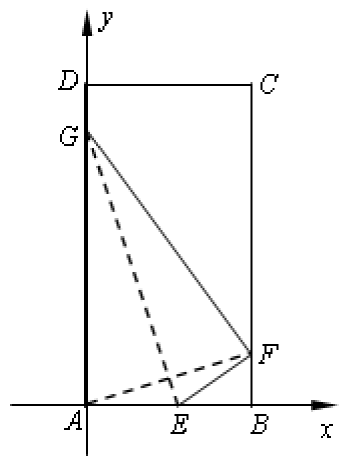
16．解：(1) $f(x)=\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{6})-\cos\frac{\pi}{4}x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{\pi}{4}x-\frac{3}{2}\cos\frac{\pi}{4}x=\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{4}x-\frac{\pi}{3})$ …4 分

$\therefore f(x)$ 的单调增区间为：$[-\frac{2}{3}+8k,\frac{10}{3}+8k](k\in Z)$ ……7 分

(2) $f(x)$ 的值域为：$(-\frac{3}{2},\sqrt{3}]$ ……14 分

17. 解：（1）$[-1,8]$，（2）$m=\dfrac{1}{4}$

18.解：（1）以 $A$ 为原点，$AB$ 所在直线为 $x$ 轴，建立如图所示平面直角坐标系，则 $A(0,0)$，




设 $F(2,2a)$（$0<2a<4$），则 $AF$ 的中点为 $(1,a)$，斜率为 $a$，

而 $EG\perp AF$，故 $EG$ 的斜率为 $-\dfrac{1}{a}$，

则 $EG$ 的方程为 $y-a=-\dfrac{1}{a}(x-1)$，

令 $x=0$，得 $y_G=a+\dfrac{1}{a}$；……………2 分

令 $y=0$，得 $x_E=1+a^2$；……………4 分

由 $\begin{cases}0<y_G\le 4\\ 0<x_E\le 2BF\\ 0<BF<4\end{cases}$，得 $\begin{cases}2-\sqrt{3}\le a\le 2+\sqrt{3}\\ 0<a\le 1\\ 0<a<2\end{cases}$，

$\therefore 2-\sqrt{3}\le a\le 1$，

即入口 $F$ 的选址需满足 $BF$ 的长度范围是 $[4-2\sqrt{3},2]$（单位：km）．……………6 分

（2）因为 $S_1=2S_{\Delta AEG}=AE\cdot AG=\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+a^2\right)=a^3+2a+\dfrac{1}{a}$，

故该商业区的环境舒适度指数 $\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{S_{ABCD}-S_1}{S_1}=\dfrac{S_{ABCD}}{S_1}-1=\dfrac{8}{S_1}-1$，……………9 分

所以要使 $\dfrac{S_2}{S_1}$ 最大，只需 $S_1$ 最小.

设 $S_1=f(a)=a^3+2a+\dfrac{1}{a},a\in[2-\sqrt{3},1]$，……………10 分

则 $f'(a)=3a^2+2-\dfrac{1}{a^2}=\dfrac{3a^4+2a^2-1}{a^2}=\dfrac{\left(3a^2-1\right)\left(a^2+1\right)}{a^2}=\dfrac{\left(\sqrt{3}a-1\right)\left(\sqrt{3}a+1\right)\left(a^2+1\right)}{a^2}$，

令 $f'(a)=0$，得 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $a=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$（舍），……………12 分

$a,f'(a),f(a)$ 的情况如下表：

| $a$ | $2-\sqrt{3}$ | $\left(2-\sqrt{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1\right)$ | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $f(a)$ | | 减 | 极小 | 增 | |

故当 $a=\frac{\sqrt{3}}{3}$，即入口 $F$ 满足 $BF=\frac{2}{3}\sqrt{3}$ km 时，该商业区的环境舒适度指数最大. …16 分

19．解：（1） 因为 $f'(x)=-x^2+x+2a$，

曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(2,f(2))$ 处的切线的斜率 $k=f'(2)=2a-2=-6$，$a=-2$.

（2） 当 $a=1$ 时，$f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x$，

$f'(x)=-x^2+x+2=-(x+1)(x-2)$.

| $x$ | $(-\infty,-1)$ | $-1$ | $(-1,2)$ | 2 | $(2,+\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | 0 | $+$ | 0 | $-$ |
| $f(x)$ | 单调减 | $-\frac{7}{6}$ | 单调增 | $\frac{10}{3}$ | 单调减 |

所以 $f(x)$ 的极大值为 $\frac{10}{3}$，$f(x)$ 的极小值为 $-\frac{7}{6}$.

（3） $f(x)=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2ax$，$f'(x)=-x^2+x+2a$.

令 $f'(x)=0$，得 $x_1=\frac{1-\sqrt{1+8a}}{2}$，$x_2=\frac{1+\sqrt{1+8a}}{2}$，

$f(x)$ 在（$-\infty,x_1$），（$x_2,+\infty$）上单调递减，在（$x_1,x_2$）上单调递增.

当 $0<a<2$ 时，有 $x_1<1<x_2<4$，所以 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最大值为 $f(x_2)$.

又因为 $f(4)<f(1)$, 所以 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最小值为 $f(4)=8a-\frac{40}{3}=-\frac{16}{3}$, 解得 $a=1$.

所以 $x_2=2$，所以 $f(x)$ 在 $[1,4]$ 上的最大值为 $f(2)=\frac{10}{3}$.

20．解：(1) $f'(x)=1-\frac{1}{x}$, $x>0$, 令 $f'(x)=0$, 则 $x=1$.

当 $t\geq1$ 时, $f(x)$ 在 $[t,t+1]$ 上单调递增, $f(x)$ 的最小值为 $f(t)=t-\ln t$; (1 分)

当 $0<t<1$ 时,$f(x)$在区间$(t,1)$上为减函数,在区间$(1,t+1)$上为增函数,$f(x)$的最小值为 $f(1)=1$.

综上,$m(t)=\begin{cases} t-\ln t, & t\geq 1, \\ 1, & 0<t<1. \end{cases}$ (3 分)

(2) $h(x)=x^2-(a+1)x+\ln x$,不妨取 $0<x_1<x_2$,则 $x_1-x_2<0$,

则由$\frac{h(x_1)-h(x_2)}{x_1-x_2}>1$,可得 $h(x_1)-h(x_2)<x_1-x_2$, 变形得 $h(x_1)-x_1<h(x_2)-x_2$ 恒成立. (5 分)

令 $F(x)=h(x)-x=x^2-(a+2)x+\ln x,x>0$,

则 $F(x)=x^2-(a+2)x+\ln x$ 在$(0,+\infty)$上单调递增, 故 $F'(x)=2x-(a+2)+\frac{1}{x}\geq 0$ 在$(0,+\infty)$上恒成立,(7 分)

所以 $2x+\frac{1}{x}\geq a+2$ 在$(0,+\infty)$上恒成立.因为 $2x+\frac{1}{x}\geq 2\sqrt{2}$,当且仅当 $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$时取“=”,所以 $a\leq 2\sqrt{2}-2$.(10 分)

(3) 因为 $f(x)\geq\frac{a-g(x)}{x}$,所以 $a(x+1)\leq 2x^2-x\ln x$.

因为 $x\in(0,1]$,则 $x+1\in(1,2]$,所以$\exists x\in(0,1]$,使得 $a\leq\frac{2x^2-x\ln x}{x+1}$成立.

令 $M(x)=\frac{2x^2-x\ln x}{x+1}$,则 $M'(x)=\frac{2x^2+3x-\ln x-1}{(x+1)^2}$.(12 分)

令 $y=2x^2+3x-\ln x-1$,则由 $y'=\frac{(x+1)(4x-1)}{x}=0$ 可得 $x=\frac{1}{4}$或 $x=-1$(舍).

当 $x\in\left(0,\frac{1}{4}\right)$时,$y'<0$,则函数 $y=2x^2+3x-\ln x-1$ 在$\left(0,\frac{1}{4}\right)$上单调递减;

当 $x\in\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$时,$y'>0$,则函数 $y=2x^2+3x-\ln x-1$ 在$\left(\frac{1}{4},+\infty\right)$上单调递增.

所以 $y\geq\ln 4-\frac{1}{8}>0$,所以 $M'(x)>0$ 在 $x\in(0,1]$时恒成立,

所以 $M(x)$在$(0,1]$上单调递增.所以只需 $a\leq M(1)$,即 $a\leq 1$. (15 分)

所以实数 $a$ 的最大值为 1. (16 分)