

极值点偏移问题总结

一、判定方法

1、极值点偏移的定义

对于函数 $y = f(x)$ 在区间 (a, b) 内只有一个极值点 x_0 ，方程 $f(x) = 0$ 的解分别为

x_1, x_2 ，且 $a < x_1 < x_2 < b$ ，

(1) 若 $\frac{x_1 + x_2}{2} \neq x_0$ ，则称函数 $y = f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上极值点 x_0 偏移；

(2) 若 $\frac{x_1 + x_2}{2} > x_0$ ，则函数 $y = f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上极值点 x_0 左偏，简称极值点 x_0 左偏；

(3) 若 $\frac{x_1 + x_2}{2} < x_0$ ，则函数 $y = f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上极值点 x_0 右偏，简称极值点 x_0 右偏。

2、极值点偏移的判定定理

判定定理 1 对于可导函数 $y = f(x)$ ，在区间 (a, b) 上只有一个极大（小）值点 x_0 ，方程 $f(x) = 0$ 的解分别为 x_1, x_2 ，且 $a < x_1 < x_2 < b$ ，

(1) 若 $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) > 0$ ，则 $\frac{x_1 + x_2}{2} < (>) x_0$ ，即函数 $y = f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上极大（小）值点 x_0 右（左）偏；

(2) 若 $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) < 0$ ，则 $\frac{x_1 + x_2}{2} > (<) x_0$ ，即函数 $y = f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上极大（小）值点 x_0 左（右）偏。

证明：(1) 因为可导函数 $y = f(x)$ ，在区间 (a, b) 上只有一个极大（小）值点 x_0 ，则函数 $y = f(x)$ 的单调递增（减）区间为 (a, x_0) ，单调递减（增）区间为 (x_0, b) ，又 $a < x_1 < x_2 < b$ ，有 $\frac{x_1 + x_2}{2} \in (a, b)$ 由于 $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) > 0$ ，故 $\frac{x_1 + x_2}{2} \in (a, x_0)$ ，所以 $\frac{x_1 + x_2}{2} < (>) x_0$ ，即函数极大（小）值点 x_0 右（左）偏。

判定定理 2 对于可导函数 $y = f(x)$ ，在区间 (a, b) 上只有一个极大（小）值点 x_0 ，方

程 $f(x)=0$ 的解分别为 x_1, x_2 , 且 $a < x_1 < x_2 < b$,

(1) 若 $f(x_1) < f(2x_0 - x_2)$, 则 $\frac{x_1 + x_2}{2} < (>)x_0$, 即函数 $y = f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上极大(小)值点 x_0 右(左)偏;

(2) 若 $f(x_1) > f(2x_0 - x_2)$, 则 $\frac{x_1 + x_2}{2} > (<)x_0$, 即函数 $y = f(x)$ 在区间 (x_1, x_2) 上极大(小)值点 x_0 左(右)偏。

证明: (1) 因为对于可导函数 $y = f(x)$, 在区间 (a, b) 上只有一个极大(小)值点 x_0 , 则函数 $y = f(x)$ 的单调递增(减)区间为 (a, x_0) , 单调递减(增)区间为 (x_0, b) , 又 $a < x_1 < x_2 < b$, 有 $x_1 < x_0$, 且 $2x_0 - x_2 < x_0$, 又 $f(x_1) < f(2x_0 - x_2)$, 故 $x_1 < (>)2x_0 - x_2$, 所以 $\frac{x_1 + x_2}{2} < (>)x_0$, 即函数极大(小)值点 x_0 右(左)偏。

结论 (2) 证明略。

二、运用判定定理判定极值点偏移的方法

1. 方法概述:

- (1) 求出函数 $f(x)$ 的极值点;
- (2) 构造一元差函数 $F(x) = f(x_0 + x) - f(x_0 - x)$
- (3) 确定函数 $F(x)$ 的单调性;
- (4) 结合 $F(0) = 0$, 判断 $F(x)$ 的符号, 从而确定 $f(x_0 - x), f(x_0 + x)$ 的大小关系。

2. 抽化模型

答题模板: 若已知函数 $f(x)$ 满足 $f(x_1) = f(x_2)$, x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 求证: $x_1 + x_2 < 2x_0$

(1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性并求出 $f(x)$ 的极值点 x_0 ;

假设此处 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增。

(2) 构造 $F(x) = f(x_0 + x) - f(x_0 - x)$;

注：此处根据题意需要还可以构造 $F(x) = f(x) - f(2x_0 - x)$

(3) 通过求导 $F'(x)$ 谈论 $F(x)$ 的单调性，判断处 $F(x)$ 在某段区间上的正负，并得出

$f(x_0 + x)$ 与 $f(x_0 - x)$ 的大小关系；

假设此处 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增，那么我们便可以得出

$F(x) > F(0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$ ，从而得到： $x > x_0$ 时， $f(x_0 + x) > f(x_0 - x)$

(4) 不妨设 $x_1 < x_0 < x_2$ ，通过 $f(x)$ 的单调性， $f(x_1) = f(x_2)$ ， $f(x_0 + x)$ 与 $f(x_0 - x)$ 的大小关系得出结论；

接上述情况：由于 $x > x_0$ 时， $f(x_0 + x) > f(x_0 - x)$ 且 $x_1 < x_0 < x_2$ ， $f(x_1) = f(x_2)$ 故 $f(x_1) = f(x_2) = f[x_0 + (x_2 - x_0)] > f[x_0 - (x_2 - x_0)] = f(2x_0 - x_2)$ ，又因为 $x_1 < x_0$ ， $2x_0 - x_2 < x_0$ 且 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减，从而得到 $x_1 < 2x_0 - x_2$ ，从而 $x_1 + x_2 < 2x_0$ 得证；

(5) 若要证明 $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) < 0$ 还需进一步讨论 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 与 x_0 的大小，得出 $\frac{x_1 + x_2}{2}$ 所在的单调区间，从而得出该处函数导数值的正负，从而结论得证；

此处只需继续证明：因为 $x_1 + x_2 < 2x_0$ 故 $\frac{x_1 + x_2}{2} < x_0$ ，由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_0)$ 上单调递减，故 $f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) < 0$

说明：

- (1) 此类试题由于思路固定，所以通常情况下求导比较复杂，计算时须细心；
- (2) 此类题目若试题难度较低，会分解为三问，前两问分别求 $f(x)$ 的单调性、极值点，证明 $f(x_0 + x)$ 与 $f(x_0 - x)$ 或 $f(x)$ 与 $f(2x_0 - x)$ 的大小关系；若试题难度较大，则直接给出形如 $x_1 + x_2 < 2x_0$ 或者 $\frac{x_1 + x_2}{2} < x_0$ 的结论，让你给出证明，此时自己应主动把该小问分解为三问逐步解题。

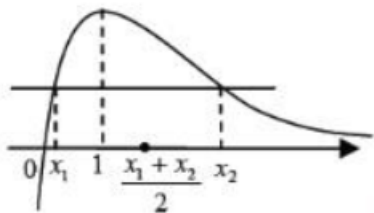
三、例题

(一) 不含参数的的极值点偏移问题

例 1：(2010 天津理 21) 已知函数 $f(x) = xe^{-x} (x \in \mathbb{R})$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 若 $x_1 \neq x_2$, 且 $f(x_1) = f(x_2)$, 求证: $x_1 + x_2 > 2$



解答:

【法一】

(1) $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, $f'(x) = 0, x = 1$; $(-\infty, 1)$ 增 $(1, +\infty)$ 减 极大值 $f(1) = \frac{1}{e}$

(2) $g(x) = f(1+x) - f(1-x) = (1+x)e^{-(1+x)} - (1-x)e^{-1+x}$,

$g'(x) = x[e^{x-1} - e^{-(1+x)}]$ $g'(x) = 0, x = 0$; $(-\infty, 0)$ 减; $(0, +\infty)$ 增

$x > 0$ 时, $g(x) > g(0) = 0$ 即 $f(1+x) > f(1-x)$

$\because x_1 \neq x_2$, 不妨设 $x_1 < x_2$, 由 (1) 知 $x_1 < 1, x_2 > 1$,

$\therefore f(x_1) = f(x_2) = f[1+(x_2-1)] > f[1-(x_2-1)] = f(2-x_2)$

$\because x_2 > 1, \therefore 2-x_2 < 1$, $f(x)$ 在 $(-\infty, 1)$ 上增,

$\therefore x_1 > 2-x_2$, 即 $x_1 + x_2 > 2$

【法二】

欲证 $x_1 + x_2 > 2$, 即证 $x_2 > 2-x_1$

由法一知 $0 < x_1 < 1, x_2 > 1$, 故 $2-x_1 > 1$

又因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上是单调递减的, 只需证 $f(x_2) < f(2-x_1)$,

又因为 $f(x_1) = f(x_2)$, 故也即证 $f(x_1) < f(2-x_1)$,

构造函数 $h(x) = f(x) - f(2-x)$, $x \in (0, 1)$

由 $h'(x) = f'(x) - f'(2-x) = \frac{1-x}{e^x}(1-e^{2x-2})$

$h(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增, $h(x) < h(1) = 0$

故原不等式 $x_1 + x_2 > 2$ 成立

【法三】

由 $f(x_1) = f(x_2)$ 得, $x_1 e^{-x_1} = x_2 e^{-x_2}$, 化简得 $e^{x_2 - x_1} = \frac{x_2}{x_1}$ ①

不妨设 $x_2 > x_1$, 由法一知 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 令 $t = x_2 - x_1$, 则 $t > 0$, $x_2 = t + x_1$,

代入①得: $e^t = \frac{t + x_1}{x_1}$, 反解出: $x_1 = \frac{t}{e^t - 1}$, 则 $x_1 + x_2 = 2x_1 + t = \frac{2t}{e^t - 1} + t$,

故要证 $x_1 + x_2 > 2$ 即证 $\frac{2t}{e^t - 1} + t > 2$, 又因为 $e^t - 1 > 0$,

等价于证明: $2t + (t - 2)(e^t - 1) > 0$ ②

构造函数 $g(t) = 2t + (t - 2)(e^t - 1) (t > 0)$, 则 $g'(t) = (t - 1)e^t + 1$, $g''(t) = te^t > 0$,

故 $g'(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g'(t) > g'(0) = 0$

从而 $g(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增, $g(t) > g(0) = 0$

【法四】

由 $f(x_1) = f(x_2)$ 得, $x_1 e^{-x_1} = x_2 e^{-x_2}$, 化简得 $e^{x_2 - x_1} = \frac{x_2}{x_1}$ ①,

两边同时取以 e 为底的对数: 得 $x_2 - x_1 = \ln \frac{x_2}{x_1} = \ln x_2 - \ln x_1$, 即 $\frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = 1$,

从而 $x_1 + x_2 = (x_1 + x_2) \frac{\ln x_2 - \ln x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_1 + x_2}{x_2 - x_1} \ln \frac{x_2}{x_1} = \frac{\frac{x_2}{x_1} + 1}{\frac{x_2}{x_1} - 1} \ln \frac{x_2}{x_1}$,

令 $t = \frac{x_2}{x_1} (t > 1)$, 则欲证 $x_1 + x_2 > 2$ 等价于证明 $\frac{t+1}{t-1} \ln t > 2$ ②,

构造 $g(t) = \frac{(t+1) \ln t}{t-1} = \left(1 + \frac{2}{t-1}\right) \ln t, (t > 1)$,

则 $g'(t) = \frac{t^2 - 1 - 2t \ln t}{t(t-1)^2}$,

又令 $h(t) = t^2 - 1 - 2t \ln t (t > 1)$ 则 $h'(t) = 2t - (2 \ln t + 1) = 2(t - 1 - \ln t)$,

由于 $t - 1 > \ln t$ 对 $\forall t \in (1, +\infty)$ 恒成立, 故 $h'(t) > 0$,

$h(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $h(t) > h(1) = 0$,

$g'(t) > 0$ 对 $\forall t \in (1, +\infty)$ 恒成立, $g(t)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, $g(t) > g(1)$

由洛必达法则知: $\lim_{t \rightarrow 1} g(t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)\ln t}{t-1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{((t+1)\ln t)'}{(t-1)'} = \lim_{t \rightarrow 1} \left(\ln t + \frac{t+1}{t} \right) = 2$

即 $g(t) > 2$, 即证③式成立, 也即原不等式成立

例 2: (2013 湖南 文 21) $f(x) = \frac{1-x}{1+x^2} e^x$,

(1) 求函数的单调区间;

(2) 证明: 当 $f(x_1) = f(x_2)$ ($x_1 \neq x_2$) 时, $x_1 + x_2 < 0$

(二) 含参数的极值点偏移问题

含参数的极值点偏移问题, 在原有的两个变元 x_1, x_2 基础上, 有多了一个参数, 故思路很自然的就会想到: 想尽一切办法消去参数, 从而转化成不含参数的问题去解决, 或者以参数为媒介, 构造出一个变元的新的函数。

例 1 已知函数 $f(x) = x - ae^x$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 求证: $x_1 + x_2 > 2$

例 2. 已知函数 $f(x) = \ln x - ax$, a 为常数, 若函数 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 求

证: $x_1 \cdot x_2 > e^2$

例 3: 已知 x_1, x_2 是函数 $f(x) = e^x - ax$ 的两个零点, 且 $x_1 < x_2$

(1) 求证: $x_1 + x_2 > 2$

(2) $x_1 \cdot x_2 < 1$

例 4: 已知函数 $f(x) = x - e^{ax} (a > 0)$, 若存在 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 使 $f(x_1) = f(x_2) = 0$, 求证:

$$\frac{x_1}{x_2} < ae$$

变式训练:

1. 设函数 $f(x) = e^x - ax + a (a \in \mathbb{R})$ 的图像与 x 轴交于 $A(x_1, 0), B(x_2, 0) (x_1 < x_2)$ 两点,

(1) 证明: $f'(\sqrt{x_1 x_2}) < 0$

(2) 求证: $x_1 x_2 < x_1 + x_2$

2. 设函数 $f(x) = a \ln x - bx^2$, 其图像在点 $P(2, f(2))$ 处切线的斜率为 -3 , 当 $a = 2$ 时, 令

$g(x) = f(x) - kx$, 设 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$ 是方程 $g(x) = 0$ 的两个根, x_0 是 x_1, x_2 的等差中

项, 求证: $g'(x_0) < 0$

3. 已知函数 $f(x) = a - \frac{1}{x} - \ln x (a \in \mathbb{R})$

(1) 若 $a = 2$, 求函数 $f(x)$ 在 $(1, e^2)$ 上的零点个数;

(2) 若 $f(x)$ 有两零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 求证: $2 < x_1 + x_2 < 3e^{a-1} - 1$

4. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + (1-a)x - a \ln x$

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a > 0$, 证明: $0 < x < a$ 时, $f(a+x) < f(a-x)$

(三) 含对数式的极值点偏移问题

根据 $f(x_1) = f(x_2)$ 建立等式, 通过消参、恒等变形转化为对数平均, 捆绑构造函数, 利用对数平均不等式链求解。

对数平均不等式的介绍与证明

两个整数 a 和 b 的对数平均定义: $L(a,b)=\begin{cases} \frac{a-b}{\ln a-\ln b} (a\neq b) \\ a (a=b) \end{cases}$,

对数平均与算术平均、几何平均的大小关系:

$$\sqrt{ab} \geq L(a,b) \leq \frac{a+b}{2}$$

例 1: 已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(2-a)x$

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 设 $a>0$, 证明: 当 $0<x<\frac{1}{a}$ 时, $f(\frac{1}{a}+x)>f(\frac{1}{a}-x)$;

(3) 若函数 $y=f(x)$ 的图像与 x 轴交于 A,B 两点, 线段 AB 中点的横坐标为 x_0 , 证明: $f'(x_0)<0$

(四) 含指数式的极值点偏移问题

指数不等式:

在对数平均的定义中, 设 $a=e^m, b=e^n$, 则 $E(a,b)=\begin{cases} \frac{e^m-e^n}{m-n} (m\neq n) \\ e^m (m=n) \end{cases}$, 根据对数平均

不等式有如下关系: $e^{\frac{m+n}{2}} \leq E(a,b) \leq \frac{e^m+e^n}{2}$

例 1 (全国 1 卷 2016 理 21) 已知函数 $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点 x_1, x_2 ,

证明: $x_1+x_2<2$

例 2 (天津 2010 理 21) 已知函数 $f(x)=xe^{-x} (x\in R)$

(1) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值;

(2) 若 $x_1\neq x_2$, 且 $f(x_1)=f(x_2)$, 求证: $x_1+x_2>2$

例 3. 设函数 $f(x)=e^x-ax+a (a\in R)$ 的图像与 x 轴交于 $A(x_1,0), B(x_2,0) (x_1<x_2)$ 两点, 证

明: $f'(\sqrt{x_1x_2}) < 0$

变式训练:

已知函数 $f(x) = ax^2 - e^x (a \in \mathbb{R})$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$

(1) 求实数 a 的取值范围;

(2) 求证: $x_1 + x_2 < 4$;