江苏省仪征中学 2018-2019 学年第二学期期末复习讲义(4)

一、填空题：

1、设 i 是虚数单位，复数 $\frac{1+ai}{2+i}$ 为纯虚数，则实数 a 的值为________． -2

2. “$\log_3 M > \log_3 N$”是“$M > N$”成立的_________条件. 必要不充分

（从“充要”、“充分不必要”、“必要不充分”中选择一个正确的填写）

3.设 α 为锐角，若 $\sin(\alpha-\frac{\pi}{6})=\frac{1}{3}$，则 $\cos\alpha$ 的值为_____．

【答案】$\frac{2\sqrt{6}-1}{6}$.

4. 将函数 $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$ 的图像向左平移 m $(m>0)$ 个单位长度后，所得的图像关于

y 轴对称，则 m 的最小值是 ________．

【答案】$\frac{\pi}{6}$

【解析】因为 $y=\sqrt{3}\cos x+\sin x=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，所以向左平移 $m(m>0)$ 个单位长度后变换为

$y=2\sin(x+\frac{\pi}{3}+m)$，由题意得 $m+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$ 且 $m>0$，即 $m=\frac{\pi}{6}+k\pi(k\in Z)$，注意到 $m>0$，

所以当 $k=0$ 时，m 取最小值 $m=\frac{\pi}{6}$，因此 m 的最小值是 $\frac{\pi}{6}$.

5.已知过定点 $P(1，2)$的直线 l 交圆 O：$x^2+y^2=9$ 于 A，B 两点，若 $AB=4\sqrt{2}$，则直线 l 的方程为______；　　当 P 为线段 AB 的中点时，则直线 l 的方程为_________________．

答案：$x=1$ 或 $3x-4y+5=0$；$x+2y-5=0$．

6. 观察下列等式：

$$1=1$$

$$2+3+4=9$$

$$3+4+5+6+7=25$$

$$4+5+6+7+8+9+10=49$$

照此规律归纳第 n（$n\in N^*$）个等式，应为___________．

$n+(n+1)+(n+2)+\ldots+(3n-2)=(2n-1)^2$

9．定义在 R 上的奇函数 $f(x)$满足：当 $x>0$ 时，$f(x)=2^x+\log_2 x$，则方程 $f(x)=0$ 的实根的个数为________．3

8.已知圆 C_1：$x^2+y^2-2mx+4y+m^2-5=0$ 和圆 C_2：$x^2+y^2+2x-2my+m^2-3=0$，若两圆相交，实数 m 的取值范围为________________________，若两圆相切，实数 m 的取值为________________________．

答案：－5＜m＜－2 或－1＜m＜2；－5、－2、－1、2．

9．已知 $f(x)=\ln(x^2-ax+2a-2)(a>0)$，若 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上是增函数，则 a 的取值范围是____________________．（1,2 ］

10 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}\cos^2\omega x+\sin\omega x\cos\omega x$（$\omega>0$）的周期为$\pi$. 当 $x\in[0,\dfrac{\pi}{2}]$时，求函数 $f(x)$ 的值域______________.

答案：$[0,\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1]$

11.设实数 $a\geq 1$，使得不等式 $x|x-a|+\dfrac{3}{2}\geq a$，对任意的实数 $x\in[1,2]$ 恒成立，则满足条件的实数 a 的范围是______．$[1,\dfrac{3}{2}]\cup[\dfrac{5}{2},+\infty)$

12.定义在R上的函数 $f(x)$ 满足：$f(x)+f'(x)>1,f(0)=4$，则不等式 $e^xf(x)>e^x+3$ 的解集是______________．$(0,+\infty)$

13. 已知函数 $f(x)=2\sqrt{3}\sin x-2\cos x$．(1)若 $x\in[0,\pi]$，求 $f(x)$的最大值和最小值；

(2)若 $f(x)=0$，求 $\dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}-\sin x-1}{\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})}$ 的值．

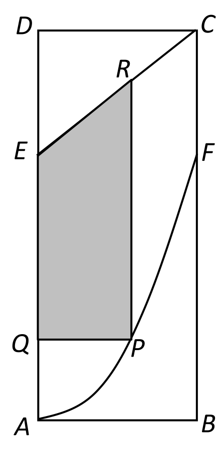
解析：（1）$f(x)=2\sqrt{3}\sin x-2\cos x=4\sin(x-\dfrac{\pi}{6})$

$x\in[0,\pi]$，则 $x-\dfrac{\pi}{6}\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{5\pi}{6}]$，$\therefore f(x)_{\max}=4$，$f(x)_{\min}=-2$

（2）$f(x)=0$，$\therefore\sin(x-\dfrac{\pi}{6})=0$，$\therefore x-\dfrac{\pi}{6}=k\pi$，$\therefore x=\dfrac{\pi}{6}+k\pi$，$\therefore\tan x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

又 $\dfrac{2\cos^2\frac{x}{2}-\sin x-1}{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}=\dfrac{1-\tan x}{\tan x+1}=2-\sqrt{3}$

14.某地政府为科技兴市，欲在如图所示的矩形 $ABCD$ 的非农业用地中规划出一个高科技工业园区（如图中阴影部分），形状为直角梯形 $QPRE$（线段 EQ 和 RP 为两个底边），已知 $AB=2km,BC=6km,AE=BF=4km$，其中 AF 是以 A 为顶点、AD 为对称轴的抛物线段．试求该高科技工业园区的最大面积．



解：以 A 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系如图，则 $A(0,0),F(2,4)$，由题意可设抛物线段所在抛物线的方程为 $y=ax^2(a>0)$，由 $4=a\times 2^2$ 得，$a=1$，$\therefore$AF 所在抛物线的方程为 $y=x^2$，又 $E(0,4),C(2,6)$，$\therefore$EC 所在直线的方程为 $y=x+4$，设 $P(x,\ x^2)(0<x<2)$，则 $PQ=x,QE=4-x^2,PR=4+x-x^2$，

$\therefore$工业园区的面积 $S=\dfrac{1}{2}(4-x^2+4+x-x^2)\cdot x=-x^3+\dfrac{1}{2}x^2+4x\ (0<x<2)$，

$\therefore S'=-3x^2+x+4$，令 $S'=0$ 得 $x=\dfrac{4}{3}$ 或 $x=-1$（舍去负值），

当x变化时，S'和S的变化情况如下表：

x	$(0,\frac{4}{3})$	$\frac{4}{3}$	$(\frac{4}{3},2)$
S'	+	0	-
S	↑	极大值$\frac{104}{27}$	↓

由表格可知，当$x=\frac{4}{3}$时，S取得最大值$\frac{104}{27}$．答：该高科技工业园区的最大面积$\frac{104}{27}$．

15.已知函数$f(x)=2x\ln x-1$.　（1）求函数$f(x)$的最小值及曲线$f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程；（2）若不等式$f(x)\le 3x^2+2ax$恒成立，求实数a的取值范围．

（1）函数$f(x)=2x\ln x-1$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=2(\ln x+x\cdot\frac{1}{x})=2(\ln x+1)$，

令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{e}$；令$f'(x)>0$，得$x>\frac{1}{e}$；令$f'(x)<0$，得$0<x<\frac{1}{e}$；

所以函数$f(x)$在$(0,\frac{1}{e})$上单调递减，在$(\frac{1}{e},+\infty)$上单调递增，

所以函数$f(x)$的最小值为$f(\frac{1}{e})=-\frac{2}{e}-1$．（4分）

因为$f'(1)=2$，即切线的斜率为2，

所以所求的切线方程为$y-f(1)=2(x-1)$，即$y-(-1)=2(x-1)$，化简得$2x-y-3=0$．（6分）

（2）不等式$f(x)\le 3x^2+2ax$恒成立等价于$2x\ln x-1\le 3x^2+2ax$在$(0,+\infty)$上恒成立，可得

$a\ge\ln x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}$在$(0,+\infty)$上恒成立，（8分）

设$h(x)=\ln x-\frac{3}{2}x-\frac{1}{2x}$，则$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{3}{2}+\frac{1}{2x^2}=-\frac{(x-1)(3x+1)}{2x^2}$，

令$h'(x)=0$，得$x=1$或$x=-\frac{1}{3}$(舍去).

当$0<x<1$时，$h'(x)>0$；当$x>1$时，$h'(x)<0$，（10分）

当x变化时，$h'(x),h(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$h'(x)$	+	0	−
$h(x)$	单调递增	-2	单调递减

所以当$x=1$时，$h(x)$取得最大值，$h(x)_{\max}=-2$，所以$a\ge -2$，

所以实数a的取值范围是$[-2,+\infty)$．

16．已知圆$O:x^2+y^2=r^2(r>0)$，与y轴交于M、N两点且M在N的上方．若直线

$y=2x+\sqrt{5}$ 与圆 O 相切.

（1）求实数 r 的值;

（2）若动点 P 满足 $PM=\sqrt{3}PN$，求 ΔPMN 面积的最大值.

（3）设圆 O 上相异两点 A、B 满足直线 MA、MB 的斜率之积为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 试探究直线 AB 是否经过定点，若经过，请求出定点的坐标；若不经过，请说明理由.

16．解:（1）∵直线 $y=2x+\sqrt{5}$ 与圆 O 相切

∴圆心 $O(0,0)$ 到直线 $2x-y+\sqrt{5}=0$ 的距离为 $d=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}}=1$　∴ $r=1$.　…………3 分

（2）设点 $P(x,y)$，点 $M(0,1),N(0,-1)$，$MN=2$;

∵ $PM=\sqrt{3}PN$　∴ $x^2+(y-1)^2=3[x^2+(y+1)^2]$，即 $x^2+y^2+4y+1=0$　…………5 分

∴点 P 在圆心为 $(0,-2)$，半径为 $\sqrt{3}$ 的圆上

∴点 P 到 y 轴的距离最大值为 $\sqrt{3}$

∴ ΔPMN 面积的最大值为 $\frac{1}{2}\times 2\times\sqrt{3}=\sqrt{3}$.　…………8 分

（3）设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $x_1{}^2+y_1{}^2=1$，$x_2{}^2+y_2{}^2=1$

①若直线 AB 的斜率不存在，则 $x_1=x_2$，$y_1=-y_2$，则

$k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{y_1-1}{x_1}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{-y_2-1}{x_2}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{1-y_2{}^2}{x_2{}^2}=1$ 与 $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 矛盾;　…………10 分

②设直线 $AB: y=kx+m$，则 $\begin{cases}y=kx+m\\x^2+y^2=1\end{cases}$　∴ $(k^2+1)x^2+2kmx+m^2-1=0$.

∴ $x_1+x_2=-\frac{2km}{k^2+1}$，$x_1\cdot x_2=\frac{m^2-1}{k^2+1}$，则 $y_1+y_2=\frac{2m}{k^2+1}$，$y_1\cdot y_2=\frac{m^2-k^2}{k^2+1}$　…………13 分

∵ $k_{MA}\cdot k_{MB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$　∴ $\frac{y_1-1}{x_1}\cdot\frac{y_2-1}{x_2}=\frac{y_1y_2-(y_1+y_2)+1}{x_1x_2}=\frac{\frac{m^2-k^2}{k^2+1}-\frac{2m}{k^2+1}+1}{\frac{m^2-1}{k^2+1}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

化简得：$\frac{m-1}{m+1}=\frac{1}{\sqrt{3}}$　∴ $m=2+\sqrt{3}$　∴直线 AB 过定点 $(0,2+\sqrt{3})$

综上：直线 AB 过定点 $(0,2+\sqrt{3})$.　…………16 分