

江苏省仪征中学 2019-2020 学年度第二学期 高一年级期中数学模拟小练 (1) · 解析

一、单项选择题：本大题共 6 小题，每小题 5 分，共 30 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 直线 $\sqrt{3}x - y - 1 = 0$ 的倾斜角是 ().

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$

【答案】B

【解析】 $k = \sqrt{3} = \tan \alpha, 0 \leq \alpha < \pi \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}$

【考点】直线的斜率与倾斜角

2. 垂直于同一条直线的两条直线一定 ()

- A. 平行 B. 相交 C. 异面 D. 以上都有可能

【答案】D

【解析】根据在同一平面内两直线平行或相交，在空间内两直线平行、相交或异面判断.

解：分两种情况：①在同一平面内，垂直于同一条直线的两条直线平行；

②在空间内垂直于同一条直线的两条直线可以平行、相交或异面.

故选 D

考点：空间中直线与直线之间的位置关系.

3. 根据下列情况，判断三角形解的情况，其中正确的是 ()

- A. $a = 8, b = 16, A = 30^\circ$, 有两解 B. $b = 18, c = 20, B = 60^\circ$, 有一解
C. $a = 5, c = 2, A = 90^\circ$, 无解 D. $a = 30, b = 25, A = 150^\circ$, 有一解

【答案】D

【解析】

A 项中 $\sin B = \frac{b}{a} \sin A = 1, \therefore B = \frac{\pi}{2}$, 故三角形一个解, A 项说法错误; B 项中

$\sin C = \frac{c}{b} \sin B = \frac{5\sqrt{3}}{9}, \therefore 0 < C < \pi$, 故 C 有锐角和钝角两种解 B 项说法错; C 项中

$b = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21}$, 故有解, C 项说法错; D 项中 $B = \frac{b}{a} \sin A = \frac{5}{12}, \therefore A = 150^\circ, \therefore B$ 一定为锐角, 有一个解, D 项说法正确, 故选 D.

4. 已知正四面体 ABCD 中, E 是 AB 的中点, 则异面直线 CE 与 BD 所成角的余弦值为 ()

- A. $\frac{1}{6}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ C. $-\frac{\sqrt{3}}{6}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【答案】B

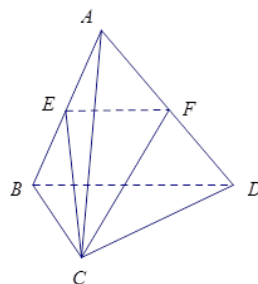
【解析】

试题分析：如图，取 AD 中点 F，连接 EF, CF，因为 E 是 AB 中点，
则 $EF \parallel BD$ ， $\angle CEF$ 或其补角就是异面直线 CE, BD 所成的角，

设正四面体棱长为 1，则 $CE = CF = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $EF = \frac{1}{2}$ ， $\cos \angle CEF = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$. 故选 B.

考点：异面直线所成的角.

【点睛】求异面直线所成的角的关键是通过平移使其变为相交直线所成角，但平移哪一条直线、平移到什么位置，则依赖于特殊的点的选取，选取特殊点时要尽可能地使它与题设的所有相减条件和解题目标紧密地联系起来. 如已知直线上的某一点，特别是线段的中点，几何体的特殊线段.



5. 设 m, n 是两条不同的直线, α, β, γ 是三个不同的平面, 给出下面四个命题:

- (1) 若 $\alpha \perp \beta, \beta \perp \gamma$, 则 $\alpha // \gamma$ (2) 若 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$, 则 $m \perp n$
(3) 若 $m // \alpha, n \subset \alpha$, 则 $m // n$ (4) 若 $\alpha // \beta, \gamma \cap \alpha = m, \gamma \cap \beta = n$, 则 $m // n$

其中正确命题个数是 ()

- A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

【答案】A

【解析】

- (1) 若 α, β, γ 为正方体相邻的三个面, 两两垂直, 故 (1) 错;
(2) 根据 $\alpha \perp \beta, m \subset \alpha, n \subset \beta$ 若需得到 $m \perp n$ 则需要 m, n 同时垂直两平面的交线, 故 (2) 错;
(3) 根据 $m // \alpha, n \subset \alpha$, 若需证 $m // n$, 则需 m, n 共面, 故 (3) 错;
(4) 若 $\alpha // \beta, \gamma \cap \alpha = m, \gamma \cap \beta = n$, 则 $m // n$, 根据由面面平行证线线平行的判定定理可得该命题正确, 故 (4) 正确.

综上, 以上命题只有一个命题正确, 故选 A.

【点睛】本题考查空间直线与平面的位置关系: 考查线面平行的判定和性质, 面面平行的判定和性质, 熟记这些是解题的关键.

6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , $\vec{m} = (a^2, b^2)$, $\vec{n} = (\tan A, \tan B)$, 且 $\vec{m} // \vec{n}$, 那么 $\triangle ABC$ 一定是 ()

- A. 锐角三角形 B. 直角三角形 C. 等腰三角形 D. 等腰或直角三角形

【答案】D

【解析】

$\triangle ABC$ 中, $\vec{m} = (a^2, b^2)$, $\vec{n} = (\tan A, \tan B)$, 且 $\vec{m} // \vec{n}$, $\therefore a^2 \tan B - b^2 \tan A = 0$, 即 $\sin^2 A \cdot \frac{\sin B}{\cos B} = \sin^2 B \cdot \frac{\sin A}{\cos A}$, $\therefore \sin A \cos A = \sin B \cos B$, 即 $\frac{1}{2} \sin 2A = \frac{1}{2} \sin 2B$, $\therefore 2A = 2B$ 或 $2A + 2B = \pi$, 即 $A = B$ 或 $A + B = \frac{\pi}{2}$; $\therefore \triangle ABC$ 是等腰三角形或直角三角形, 故选 D.

二、多项选择题: 本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 共 10 分. 在每小题给出的四个选项中, 有不止一项是符合题目要求的. 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 3 分, 错选或不答的得 0 分.

7. 下列命题中正确的有 () .

- A. 空间内三点确定一个平面
B. 棱柱的侧面一定是平行四边形
C. 分别在两个相交平面内的两条直线如果相交, 则交点只可能在两个平面的交线上
D. 一条直线与三角形的两边都相交, 则这条直线必在三角形所在的平面内

【答案】BC

【解析】对于 A 选项, 要强调该三点不在同一直线上, 故 A 错误;

对于 B 选项, 由棱柱的定义可知, 其侧面一定是平行四边形, 故 B 正确;

对于 C 选项, 可用反证法证明, 故 C 正确;

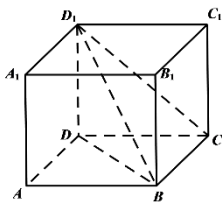
对于 D 选项, 要强调该直线不经过给定两边的交点, 故 D 错误.

【考点】点、线、面的位置关系

8. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, 给出以下四个结论:

- A. 直线 $D_1C //$ 平面 A_1ABB_1 ; B. 直线 A_1D_1 与平面 BCD_1 相交;
C. 直线 $AD \perp$ 平面 D_1DB ; D. 平面 $BCD_1 \perp$ 平面 A_1ABB_1 .

上述结论中, 所有正确结论的序号为 () .



【答案】AD

【解析】

因为平面 $A_1ABB_1 \parallel$ 平面 D_1DCC_1 ， D_1C 在平面 D_1DCC_1 内，所以直线 $D_1C \parallel$ 平面 A_1ABB_1 ，①对；

因为直线 A_1D_1 在平面 BCD_1 内，所以②错；

显然直线 AD 不垂直于直线 BD ，所以直线 AD 不垂直于平面 D_1DB ，③错；

因为 $BC \perp$ 平面 A_1ABB_1 ，所以平面 $BCD_1 \perp$ 平面 A_1ABB_1 ，④对，故答案为 A.D.

【点睛】本题主要考查正方体的性质，考查了面面平行的性质、线面垂直的判定定理、面面垂直的判定定理的应用，意在考查空间想象能力以及综合应用所学知识解答问题的能力，属于中档题.

三、填空题：本大题共 2 小题，每小题 5 分，共 10 分.

9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $BC = 8, \cos C = \frac{7}{8}$ ， AB 边上的中线 $CD = \sqrt{34}$ ，则 $\sin B$ 的值为_____.

【答案】 $\frac{\sqrt{10}}{8}$

【解析】

如图， D 为 AB 中点，设 $BC = a$ ， $AC = b$ ， $AB = c$ ， $CD = m$ ，根据余弦定理

$$\cos \angle CDA = \frac{m^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - b^2}{mc}, \quad \cos \angle CDB = \frac{m^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - a^2}{mc},$$

$$\text{又 } \cos \angle CDA + \cos \angle CDB = 0, \text{ 所以 } 2m^2 = a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2} \quad \text{①},$$

$$\text{根据题意, } m = \sqrt{34}, a = 8, \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{7}{8} \quad \text{②},$$

所以联立①②解得 $b = 4$ ， $c = 2\sqrt{6}$ ，

$$\text{由 } \cos C = \frac{7}{8} \text{ 得 } \sin C = \frac{\sqrt{15}}{8}, \text{ 又根据正弦定理: } \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \text{ 所以 } \sin B = \frac{\sqrt{10}}{8}.$$

【点睛】本题考查三角形中，已知一些边角，求解其他量，在本题中，重点考查了在大小两个三角形中利用角形同的一些转化.

10. 在锐角 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，若 $b^2 = c^2 + ac$ ，则 $\frac{b}{c}$ 的取值范围是_____.

【答案】 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$

【解析】

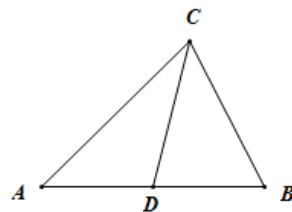
由 $b^2 = c^2 + ac$ ，及余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$

$$\text{得 } a^2 = ac(2 \cos B + 1),$$

因为 $a \neq 0$ ，所以 $a = c(2 \cos B + 1)$ ，

利用正弦定理可得 $\sin A = \sin C(2 \cos B + 1)$ ，

$$\text{得 } \sin A = \sin(B + C) = \sin B \cos C + \cos B \sin C = 2 \sin C \cos B + \sin C$$



得 $\sin B \cos C - \cos B \sin C = \sin(B - C) = \sin C$,

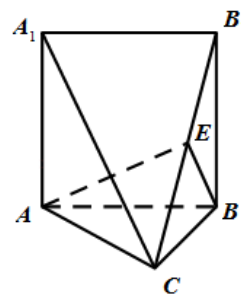
因为 A, B, C 为三角形内角, 所以 $B - C = C$, 所以 $B = 2C$,

所以 $\frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C} = \frac{\sin(2C)}{\sin C} = \frac{2 \sin C \cos C}{\sin C} = 2 \cos C$,

因为 A, B, C 为锐角三角形内角, 且 $B = 2C$,

所以 $C \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$, 所以 $\frac{b}{c} = 2 \cos C \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ 故选 D.

【点睛】本题考查正余弦定理的运用, 需注意锐角三角形必须保证每个角均为锐角, 同时, 合理运用 $\sin C = \sin(A + B), \cos C = -\cos(A + B)$.



备用. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 已知 $a - b = \frac{1}{3}c$, $3 \sin B = 2 \sin A$,

$2 \leq ac + c^2 \leq 32$, 设 $\triangle ABC$ 的面积为 S , $t = \frac{S + 2\sqrt{2}}{a}$, 则 t 的最小值为_____.

【答案】 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

【解析】

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $a - b = \frac{1}{3}c$ 得 $c = 3a - 3b$,

因为 $3 \sin B = 2 \sin A$ 利用正弦定理得 $3b = 2a$,

再根据 $2 \leq ac + c^2 \leq 32$, 可得 $c = a$, $b = \frac{2}{3}a$, $1 \leq a \leq 4$,

由余弦定理得 $b^2 = \frac{4}{9}a^2 = a^2 + a^2 - 2a^2 \cos B$,

求得 $\cos B = \frac{7}{9}$, 所以 $\sin B = \sqrt{1 - \cos^2 B} = \frac{4\sqrt{2}}{9}$,

所以 $S = \frac{1}{2}ac \sin B = \frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{4\sqrt{2}}{9} = \frac{2\sqrt{2}}{9}a^2$,

所以 $t = \frac{S + 2\sqrt{2}}{a} = \frac{\frac{2\sqrt{2}}{9}a^2 + 2\sqrt{2}}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{9}a + \frac{2\sqrt{2}}{a} \geq \frac{4\sqrt{2}}{3}$,

当且仅当 $\frac{2\sqrt{2}}{9}a = \frac{2\sqrt{2}}{a}$, 即 $a = 3$ 时取等,

所以 t 的最小值为 $\frac{4\sqrt{2}}{3}$.

【点睛】本题考查三角形中正余弦定理以及面积公式的灵活运用, 当没有已知边或角时, 我们可以用一个边来表示其他边, 然后可直接利用余弦定理求出某一个角的余弦值.

四、解答题：本大题共 4 小题，共 46 分.

11. 三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 被平面 A_1B_1C 截去一部分后得到如图所示几何体, $BB_1 \perp$ 平面 ABC , $\angle ABC = 90^\circ$, $AB = BC = BB_1$, E 为棱 B_1C 上的中点, 平面 ABE 交 A_1C 于点 F .

(1) 求证: $EF \parallel AB$;

(2) 求证: 平面 $ABE \perp$ 平面 A_1B_1C ;

(3) 求二面角 $E - AC - B$ 的正弦值.

【答案】(1) 见解析； (2) 见解析. (3) $\frac{\sqrt{6}}{3}$

【解析】

【分析】

(1) 需证明 $EF \parallel AB$ ，则需证明 EF 和 AB 所在平面互相平行，且 EF 与 AB 都平行于两平面的交线即可证明线线平行。

(2) 需证明面面垂直则只需证明一个平面内的一条直线垂直于另一平面，即该直线垂直于另一平面内两条相交直线即可。

【详解】(1) 在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AA_1 \parallel BB_1$ 且 $AA_1 = BB_1$ ，

$\therefore$ 四边形 ABB_1A_1 是平行四边形， $\therefore AB \parallel A_1B_1$ ，

$\therefore AB \not\subset$ 平面 A_1B_1C , $A_1B_1 \subset$ 平面 A_1B_1C

$\therefore AB \parallel$ 平面 A_1B_1C ，

又 $AB \subset$ 平面 $ABEF$, 平面 $ABEF \cap$ 平面 $A_1B_1C = EF$ ， $\therefore EF \parallel AB$ ，

(2) $\because BB_1 \perp$ 平面 ABC , $AB \subset$ 平面 ABC ， $\therefore BB_1 \perp AB$ ，

$\because \angle ABC = 90^\circ$ 即 $AB \perp BC$ ，

$BC \cap BB_1 = B$ ， $BC, BB_1 \subset$ 平面 BB_1C ，

$\therefore AB \perp$ 平面 BB_1C ，又 $BE \subset$ 平面 BB_1C ， $\therefore AB \perp BE$

由 (1) 知： $\therefore AB \parallel A_1B_1$ ， $\therefore BE \perp A_1B_1$ ，

$\because BC = BB_1$ ，点 E 为 B_1C 的中点， $\therefore BE \perp B_1C$ ，

$B_1C \cap A_1B_1 = B_1$ ， $B_1C, A_1B_1 \subset$ 平面 A_1B_1C

$\therefore BE \perp$ 平面 A_1B_1C ， $BE \subset$ 平面 ABE

$\therefore$ 平面 $ABE \perp$ 平面 A_1B_1C 。

(3) 略

备用：求二面角 $E-A_1C-B$ 的正弦值。

【点睛】本题考查线面垂直平行判定与性质，熟练运用线面垂直平行的性质和判定定理是解决这类题目的关键所在。

12. 在四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中， $AB=AC$ ，平面 $BB_1C_1C \perp$ 底面 $ABCD$ ，点 M 、 F 分别是线段 AA_1 、 BC 的中点。

(1) 求证： $AF \parallel$ 平面 MBC_1 ；

(2) 求证：平面 $BB_1C_1C \perp$ 平面 MBC_1 。

【答案】(1) 见解析； (2) 见解析。

【解析】

(1) 方法一：取 BC_1 中点 P ，连 MP, PF

$\because P, F$ 分别为 BC_1, BC 中点

$\therefore PF \parallel CC_1, PF = \frac{1}{2}CC_1$

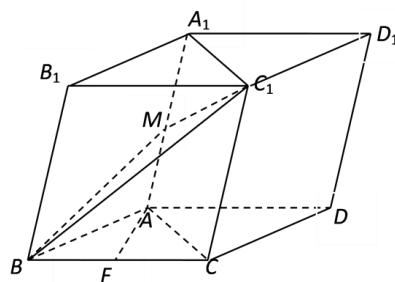
$\because ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为四棱柱

$\therefore BB_1 \parallel CC_1, BB_1 = CC_1$ 且 $AA_1 \parallel BB_1, AA_1 = BB_1$

$\therefore AA_1 \parallel CC_1, AA_1 = CC_1$

又 M 为 AA_1 的中点， $\therefore AM \parallel \frac{1}{2}CC_1, AM = \frac{1}{2}CC_1 \therefore PF \parallel AM, PF = AM$

所以四边形 $PFAM$ 为平行四边形



$\therefore AF \parallel PM$ 又 $AF \not\subset$ 面 BMC_1 , $PM \subset$ 面 BMC_1

$\therefore AF \parallel$ 面 BMC_1 ,

方法二：取 CC_1 中点 N , 连 FN, AN $\therefore FN \parallel BC_1$,

又 $FN \not\subset$ 面 BMC_1 , $BC_1 \subset$ 面 BMC_1 ,

$\therefore FN \parallel$ 面 BMC_1 ,

又 $\because ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 是四棱柱,

$\therefore BB_1 \parallel CC_1$, $BB_1 = CC_1$ 且 $AA_1 \parallel BB_1$, $AA_1 = BB_1$

$\therefore AA_1 \parallel CC_1$, $AA_1 = CC_1$,

$\therefore$ 四边形 $PFAM$ 为平行四边形

$\because M, N$ 为 AA_1, CC_1 中点,

$MA \parallel C_1N$, $MA = C_1N$,

$\therefore$ 四边形 MAC_1N 为平行四边形,

$\therefore AN \parallel MC_1$,

又 $MC \subset$ 面 BMC_1 , $AN \not\subset$ 面 BMC_1 ,

$\therefore AN \parallel$ 面 BMC_1 , 又 $PN \cap AN = N$, $PA, AN \subset$ 面 BMC_1

$\therefore$ 面 $AFN \parallel$ 面 BMC_1 , 又 $\because AF \subset$ 面 AFN ,

$\therefore FN \parallel$ 面 BMC_1

(2) $\because AB = AC$, F 为 BC 的中点, $\therefore AF \perp BC$,

又 面 $BB_1C_1C \perp$ 面 $ABCD$, $BC =$ 面 $BB_1C_1C \cap$ 面 $ABCD$, $AF \subset$ 面 $ABCD$,

$\therefore AF \perp$ 面 BB_1C_1C ,

又 $BB_1 \subset$ 面 BB_1C_1C , $\therefore AF \perp BB_1$,

而 $MP \parallel AF$, $\therefore MP \perp BC$, $MP \perp BB_1$

又 $BC \cap BB_1 = B$, $BC, BB_1 \subset$ 面 BB_1C_1C ,

$\therefore MP \perp$ 面 BB_1C_1C , 又 $MP \subset$ 面 MBC_1

$\therefore$ 面 $BB_1C_1C \perp$ 面 MBC_1 .

【点睛】本题考查线面垂直平行的判定与性质, 全部转化到证明线线垂直或平行, 证明线线平行通常采用三角形中位线或平行四边形对边进行证明, 证明线线垂直通常利用平行的传递性或者勾股定理数据计算证明.

13. 在 $\triangle ABC$ 中, a 、 b 、 c 分别是角 A 、 B 、 C 所对的边, $1 + \frac{\tan C}{\tan B} = \frac{2a}{b}$,

(1) 求角 C 的大小;

(2) 若 $(a+b)^2 - c^2 = 4$, 求 $\frac{1}{b^2} - 3a$ 的最小值.

【答案】(1) $C = \frac{\pi}{3}$; (2) -4 .

【解析】

【分析】

(1) 根据题目中的条件再利用三角恒等变化公式和正余弦定理转化成关于角的方程, 从而得到角 C .

(2) 通过第一问得出的角 C 和题意找到边 a 、 b 和 c 之间的关系, 然后利用函数的性质得到式子的最小值.

【详解】(1) 由正弦定理得: $a = 2R\sin A$, $b = 2R\sin B$,

$$\therefore 1 + \frac{\sin C \cos B}{\sin B \cos C} = \frac{2\sin A}{\sin B}, \therefore \frac{\sin B \cos C + \cos B \sin C}{\sin B \cos A} = \frac{2\sin A}{\sin B},$$

$$\therefore \frac{\sin(B+C)}{\sin B \cos A} = \frac{2\sin A}{\sin B}, \therefore \frac{\sin A}{\sin B \cos A} = \frac{2\sin A}{\sin B},$$

$$\because A \in (0, \pi), \therefore \sin A \neq 0, \sin B \neq 0, \therefore \cos C = \frac{1}{2}$$

$$\because C \in (0, \pi), \therefore C = \frac{\pi}{3}$$

$$(2) \because (a+b)^2 - c^2 = 4, \therefore a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = 4$$

$$\text{又} \because c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = a^2 + b^2 - ab,$$

$$\therefore 3ab = 4, \therefore \frac{1}{b} = \frac{3a}{4}$$

$$\therefore \frac{1}{b^2} - 3a = \frac{9}{16}a^2 - 3a = \frac{9}{16}\left(a - \frac{8}{3}\right)^2 - 4, \text{ 当 } a = \frac{8}{3} \text{ 时, } \left(\frac{1}{b^2} - 3a\right)_{\min} = -4.$$

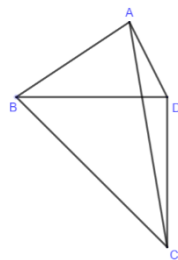
【点睛】本题考查正余弦定理以及三角恒等变化的运用，选对利用正弦定理还是余弦定理是解决这类题目的关键。

14. (本小题满分 12 分)

为了美化环境，某公园欲将一块空地规划建成休闲草坪，休闲草坪的形状为如图所示的四边形 ABCD. 其中 $AB=3$ 百米， $AD=\sqrt{5}$ 百米，且 $\triangle BCD$ 是以 D 为直角顶点的等腰直角三角形. 拟修建两条小路 AC, BD (路的宽度忽略不计)，设 $\angle BAD = \theta$ ， $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$.

(1) 当 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时，求小路 AC 的长度；

(2) 当草坪 ABCD 的面积最大时，求此小路 BD 的长度.



【答案】(1) $AC = \sqrt{37}$ 百米；(2) $BD = \sqrt{26}$ 百米.

【解析】(1) 当 $\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$ 时，在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \theta} = \sqrt{9 + 5 + 6} = 2\sqrt{5},$$

$$\cos \angle ADB = \frac{AD^2 + BD^2 - AB^2}{2AD \cdot BD} = \frac{5 + 20 - 9}{2\sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5}} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5} = \sin \angle ADC$$

$$\text{因为 } \angle ADC \text{ 为钝角, 所以 } \cos \angle ADC = -\sqrt{1 - \sin^2 \angle ADC} = -\frac{3}{5}$$

在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得，

$$AC = \sqrt{DC^2 + AD^2 - 2DC \cdot AD \cdot \cos \angle ADC} = \sqrt{20 + 5 + 12} = \sqrt{37}$$

(2) 在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得

$$BD = \sqrt{AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cdot \cos \theta} = \sqrt{14 - 6\sqrt{5} \cos \theta}$$

$$\text{所以 } S = \frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \theta + \frac{1}{2}BD^2 = \frac{3\sqrt{5}}{2}\sin \theta + 7 - 3\sqrt{5} \cos \theta, \theta \in (0, \pi)$$

于是 $S = 7 + \frac{15}{2}\sin(\theta + \varphi)$, 其中 $\tan \varphi = -2, \varphi \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$. 所以,

$$\text{当 } \theta + \varphi = \frac{\pi}{2} \text{ 时, } S \text{ 最大, 此时 } \tan \theta = \frac{1}{\tan \varphi} = -\frac{1}{2} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta},$$

$$\text{又因为 } \theta \in (0, \pi), \text{ 所以 } \theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi), \text{ 解得 } \cos \theta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\text{所以此时 } BD = \sqrt{14 - 6\sqrt{5} \cos \theta} = \sqrt{14 + 6\sqrt{5} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5}} = \sqrt{26}$$

答：(1) $AC = \sqrt{37}$ 百米，(2) 当四边形面积最大时，小路 $BD = \sqrt{26}$ 百米.
【考点】解三角形的应用

备用：14. 函数 $f(x) = 2\cos x \cdot \sin(x + \frac{\pi}{3})$ 的最大值为_____.

【答案】 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

【解析】 $f(x) = 2\cos x(\frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x) = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}(1 + \cos 2x) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin(2x + \frac{\pi}{3})$,

最大值 $1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$

【考点】三角恒等变换；辅助角公式；三角函数的图像和性质