

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一个是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上）

1. 命题“ $\forall x \geq 2, x^2 \geq 4$ ”的否定为( )

- A.  $\forall x \geq 2, x^2 < 4$                       B.  $\forall x < 2, x^2 \geq 4$   
C.  $\exists x_0 < 2, x_0^2 < 4$                       D.  $\exists x_0 \geq 2, x_0^2 < 4$

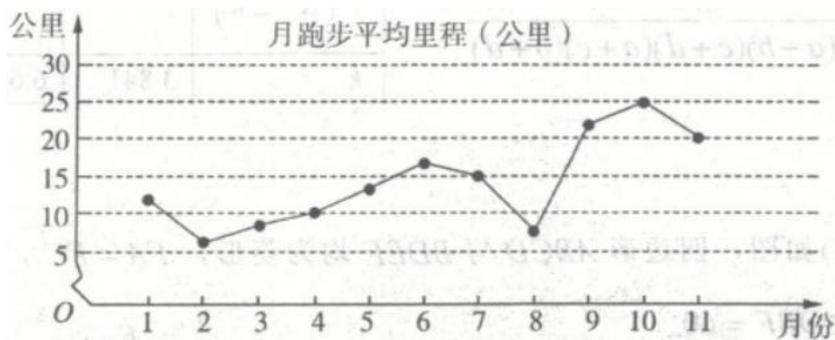
2. 已知函数  $y = \sqrt{-x^2 + 2x + 3}$  的定义域为集合 M, 集合  $N = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ , 则  $M \cup N =$  ( )

- A.  $[-1, 3]$                       B.  $[0, 2]$                       C.  $[0, 1]$                       D.  $[-1, 4]$

3. 已知复数  $z = 3 + 4i$ , 则  $|z^2 - 3z| =$  ( )

- A.  $\sqrt{5}$                       B. 5                      C. 20                      D.  $2\sqrt{5}$

4. 某学校为了解学校教师组成的跑步社团每月跑步的平均里程, 收集并整理了 2019 年 1 月至 2019 年 11 月期间跑步社团的成员每月跑步的平均里程 (单位: 公里) 的数据, 绘制了下面的折线图:

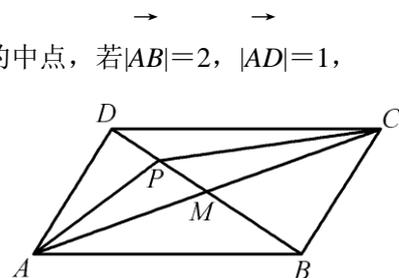


根据折线图, 下列结论正确的是( )

- A. 月跑步平均里程的中位数为 6 月份对应的里程数  
B. 月跑步平均里程数逐月增加  
C. 月跑步平均里程高峰期大致在 8、9 月  
D. 1 月至 5 月的月跑步平均里程相对于 6 月至 11 月, 波动性更小, 变化比较平稳

5. 如图, 已知平行四边形  $ABCD$  的两条对角线相交于点  $M$ ,  $P$  是  $MD$  的中点, 若  $|AB| = 2$ ,  $|AD| = 1$ , 且  $\angle BAD = 60^\circ$ , 则  $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CB}$  等于( )

- A. -1                      B.  $-\frac{5}{4}$                       C. 1                      D.  $\frac{5}{4}$



6. 已知符号函数  $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ,  $f(x) = 2x$ , 若  $\varphi(x) = f(3x) - f(x)$ , 则( )

- A.  $f(x) = 2x \operatorname{sgn} x$                       B.  $f(x) = -2x \operatorname{sgn} x$   
C.  $\operatorname{sgn}(f(x)) = \operatorname{sgn}(\varphi(x))$                       D.  $\operatorname{sgn}(f(x)) = -\operatorname{sgn}(\varphi(x))$

7. 我国古代数学名著《数书九章》中有“天池盆测雨”题：在下雨时，用一个圆台形的天池盆接雨水．天池盆盆口直径为二尺八寸，盆底直径为一尺二寸，盆深一尺八寸．若盆中积水深九寸，则该处的平地

降雨量（盆中积水体积与盆口面积之比）为（台体体积公式： $V_{\text{台体}} = \frac{1}{3}(S_1 + \sqrt{S_1 S_2} + S_2)h$ ， $S_1$ ， $S_2$ 分别为上、下底面面积， $h$ 为台体的高）（ ）

- A. 3                      B. 4                      C.  $\frac{237}{49}$                       D.  $\frac{474}{49}$

8. 若定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x) < f'(x) - 2$  的导函数为  $f'(x)$ ，并且满足  $f(x) < f'(x) - 2$ ，则下列正确的是（ ）

- A.  $f(2021) - ef(2020) < 2(e-1)$                       B.  $f(2021) - ef(2020) > 2(e-1)$   
 C.  $f(2021) - ef(2020) > 2(e+1)$                       D.  $f(2021) - ef(2020) < 2(e+1)$

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分．在每小题给出的四个选项中，至少有两个是符合题目要求的，请把答案填涂在答题卡相应位置上）

9. 下列不等式成立的是（ ）

- A. 若  $a < b < 0$ ，则  $a^2 > b^2$                       B. 若  $ab = 4$ ，则  $a + b \geq 4$   
 C. 若  $a > b$ ，则  $ac^2 > bc^2$                       D. 若  $a > b > 0$ ， $m > 0$ ，则  $\frac{b}{a} < \frac{b+m}{a+m}$

10. 把函数  $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$  的图像向左平移  $\varphi$  ( $0 < \varphi < \pi$ ) 个单位长度可以得到函数  $g(x)$  的图像，若  $g(x)$  的图像关于  $y$  轴对称，则  $\varphi$  的值可能为（ ）

- A.  $\frac{5\pi}{12}$                       B.  $\frac{7\pi}{12}$                       C.  $\frac{5\pi}{6}$                       D.  $\frac{11\pi}{12}$

11. 在长方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中， $AA_1 = AB = 4$ ， $BC = 2$ ， $M$ ， $N$  分别为棱  $C_1D_1$ ， $CC_1$  的中点，则下列说法正确的是（ ）

- A.  $MN \parallel$  平面  $A_1BD$                       B. 平面  $MNB$  截长方体所得截面的面积为  $6\sqrt{2}$   
 C. 直线  $BN$  与  $B_1M$  所成角为  $60^\circ$                       D. 三棱锥  $N-A_1DM$  的体积为 4

12. 已知函数  $f(x) = \frac{|x|}{e^{|x|}} + 1$ ， $g(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq 0 \\ x^2 - 2x + a, & x > 0 \end{cases}$ ，且  $g(1) = 0$ ，则关于  $x$  的方程  $g(g(x) - t) - 1 = 0$

实根个数的判断正确的是（ ）

- A. 当  $t < -2$  时，方程  $g(g(x) - t) - 1 = 0$  没有相异实根  
 B. 当  $-1 + \frac{1}{e} < t < 0$  或  $t = -2$  时，方程  $g(g(x) - t) - 1 = 0$  有 1 个相异实根  
 C. 当  $1 < t < 1 + \frac{1}{e}$  时，方程  $g(g(x) - t) - 1 = 0$  有 2 个相异实根  
 D. 当  $-1 < t < -1 + \frac{1}{e}$  或  $0 < t \leq 1$  或  $t = 1 + \frac{1}{e}$  时，方程  $g(g(x) - t) - 1 = 0$  有 4 个相异实根

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。请把答案填写在答题卡相应位置上）

13. 已知  $a, b$  为单位向量，且  $a \cdot b = 0$ ，若  $c = 2a - \sqrt{5}b$ ，则  $\cos \langle a, c \rangle =$ \_\_\_\_\_.

14. 已知  $x > 0$ ，若关于  $x$  的不等式  $\frac{x^2 + x + 2}{x^2 + 1} < a$  恒成立，则  $a$  的取值范围是\_\_\_\_\_.

15. 若函数  $f(x)$  的导函数  $f'(x)$  存在导数，记  $f'(x)$  的导数为  $f''(x)$ . 如果对  $\forall x \in (a, b)$ ，都有  $f''(x) < 0$ ，

则  $f(x)$  有如下性质：

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}, \text{ 其中 } n \in \mathbf{N}^*, x_1, x_2, \dots, x_n \in (a, b).$$

若  $f(x) = \sin x$ ，则  $f''(x) =$ \_\_\_\_\_；在锐角  $\triangle ABC$  中，根据上述性质推断： $\sin A + \sin B + \sin C$  的最大值为\_\_\_\_\_.

16. 已知正方体的棱长为 4，以该正方体的一个顶点为球心，以  $4\sqrt{2}$  为球的半径作球面，则该球面被正方体表面所截得的所有弧长的和为\_\_\_\_\_.

四、解答题（本大题共 6 小题，共计 70 分。请在答题卡指定区域内作答。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

已知定义域为  $\mathbf{R}$  的函数  $f(x)$  满足  $f(x) + f(-x) = 0$ ，当  $x > 0$  时， $f(x) = \log_2 \frac{1}{x}$ .

(1) 求函数  $f(x)$  的解析式；

(2) 解关于  $x$  的不等式： $f(-2^x) + \log_2 3 > 0$ .

18.（本小题满分 12 分）

在  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  所对的边分别为  $a, b, c$ ，且  $a \cos B = (3c - b) \cos A$ .

(1) 求  $\cos A$  的值；

→   →   →   →

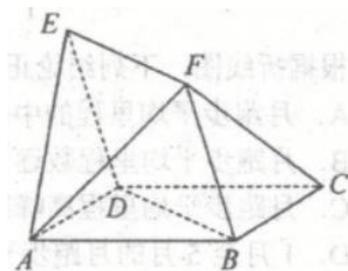
(2) 若  $b = 3$ ，点  $M$  在线段  $BC$  上， $AB + AC = 2AM$ ， $|AM| = 3\sqrt{2}$ ，求  $\triangle ABC$  的面积.

19.（本小题满分 12 分）

如图，四边形  $ABCD$  与  $BDEF$  均为菱形， $FA = FC$ ， $AB = 2$ ，且  $\angle DAB = \angle DBF = 60^\circ$ .

(1) 求证： $AC \perp BF$ ；

(2) 求二面角  $E-AF-B$  的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin x - \sqrt{3}\cos^2 x + \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

(1) 求  $f(x)$  的最大值及取得最大值时  $x$  的值;

(2) 若方程  $f(x) = \frac{2}{3}$  在  $(0, \pi)$  上的解为  $x_1, x_2$ , 求  $\cos(x_1 - x_2)$  的值.

21. (本小题满分 12 分)

2020 年 8 月, 体育总局和教育部联合提出了《关于深化体教融合, 促进青少年健康发展的意见》. 某地区为落实该意见, 初中毕业生升学体育考试规定, 考生必须参加立定跳远、掷实心球、1 分钟跳绳三项测试, 三项考试满分为 50 分, 其中立定跳远 15 分, 掷实心球 15 分, 1 分钟跳绳 20 分. 某学校在初三上学期开始时掌握全年级学生每分钟跳绳的情况, 随机抽取了 100 名学生进行测试, 得到频率分布直方图 (如下图所示), 且规定计分规则如下表:

每分钟跳绳个数	[155, 165)	[165, 175)	[175, 185)	[185, 215]
得分	17	18	19	20

(1) 现从样本的 100 名学生中, 任意选取 2 人, 求两人得分之和不大于 35 分的概率;

(2) 若该校初三年级所有学生的跳绳个数  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ , 用样本数据的平均值和方差估计总体的期望和方差, 已知样本方差  $s^2 \approx 169$  (各组数据用中点值代替). 根据往年经验, 该校初三年级学生经过训练, 正式测试时跳绳个数都有明显进步. 假设中考正式测试时每人每分钟跳绳个数比初三上学期开始时个数增加 10 个, 现利用所得正态分布模型:

(i) 预估全年级恰好有 2000 名学生时, 正式测试每分钟跳 182 个以上的人数; (结果四舍五入到整数)

(ii) 若在全年级所有学生中任意选取 3 人, 记正式测试时每分钟跳 195 个以上的人数为  $\xi$ , 求随机变量  $\xi$  的分布列和期望.

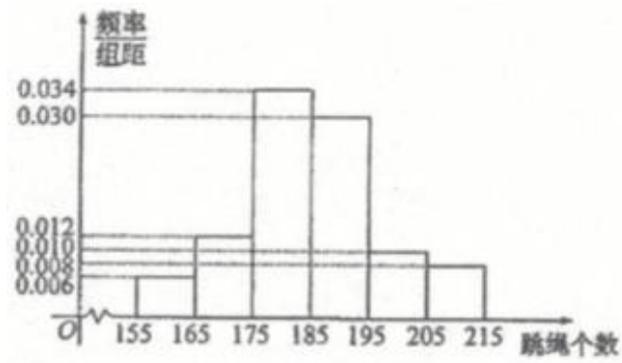
附:  $160 \times 0.06 + 170 \times 0.12 + 180 \times 0.34 + 190 \times 0.30 + 200 \times 0.1 + 210 \times 0.08 = 185$

若随机变量  $X$  服从正态分布  $N(\mu, \sigma^2)$ ,

则  $P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0.6826$ ,

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0.9544$ ,

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0.9974$ .



22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = x^2 + ax - \ln x (a \in R)$ .

(1) 若函数  $f(x)$  在  $[1, 2]$  上是减函数, 求实数  $a$  的取值范围;

(2) 令  $g(x) = f(x) - x^2$ , 是否存在实数  $a$ , 使得当  $x \in (0, e]$  时, 函数  $g(x)$  的最小值

是 3? 若存在, 求出实数  $a$  的值; 若不存在, 说明理由;

(3) 当  $x \in (0, e]$  时, 证明  $e^2 x^2 > (x+1) \ln x + \frac{5}{2}x$ .

江苏省仪征中学 2021 届高三数学期中模拟试卷一参考答案 2020.10

- 1-8 D A C D A C A B      9.AD      10. AD      11. ACD      12. AB  
 13.  $\frac{2}{3}$       14.  $\left(\frac{\sqrt{2}+3}{2}, +\infty\right)$       15.  $-\sin x$        $\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (第一空2分, 第二空3分)      16.  $6\pi$

17. 解: (1) 由  $f(x)+f(-x)=0$  得函数  $f(x)$  为奇函数,

当  $x < 0$  时,  $-x > 0$ , 则  $f(-x) = \log_2\left(-\frac{1}{x}\right)$ ,  $\therefore f(x) = -\log_2\left(-\frac{1}{x}\right)$ ,

$$\therefore f(0) = 0, \therefore f(x) = \begin{cases} \log_2 \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -\log_2\left(-\frac{1}{x}\right), & x < 0 \end{cases} \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

(2) 可将不等式  $f(-2^x) + \log_2 3 > 0$  转化为  $x + \log_2 3 > 0$ ,  $\therefore x > -\log_2 3$

所以不等式的解集为  $(-\log_2 3, +\infty)$ .

18.解: (1) 因为  $a \cos B = (3c - b) \cos A$ ,

正弦定理得  $\sin A \cos B = (3 \sin C - \sin B) \cos A$ ,

即  $\sin A \cos B + \sin B \cos A = 3 \sin C \cos A$ ,  $\sin C = 3 \sin C \cos A$ ,

在  $\triangle ABC$  中,  $\sin C \neq 0$ , 所以  $\cos A = \frac{1}{3}$ .

$\rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow \quad \rightarrow$

(2) 将  $\vec{AB} + \vec{AC} = 2\vec{AM}$ , 两边平方得  $AB^2 + AC^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4AM^2$ ,

由  $b = 3$ ,  $|\vec{AM}| = 3\sqrt{2}$ ,  $\cos A = \frac{1}{3}$ , 得  $c^2 + 9 + 2 \times c \times 3 \times \frac{1}{3} = 4 \times 18$ ,

解得  $c = 7$  或  $c = -9$  (舍去).

所以  $\triangle ABC$  的面积  $S = \frac{1}{2} \times 7 \times 3 \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 7\sqrt{2}$ .

19.解: (1) 证明: 设  $AC$  与  $BD$  相交于  $O$  点, 连接  $FO$ ,

因为四边形  $ABCD$  为菱形, 所以  $AC \perp BD$ ,  $O$  为  $AC$  的中点,

因为  $FA = FC$ , 所以  $AC \perp OF$ , .....2 分

又  $OF \cap BD = O$ , 所以  $AC \perp$  平面  $BDEF$ , .....3 分

$BF \subset$  平面  $BDEF$ ，所以  $AC \perp BF$  .....4 分

(2) 解：连接  $DF$ ，因为四边形  $BDEF$  为菱形，且  $\angle DBF = 60^\circ$ ，

所以  $\triangle DBF$  为等边三角形， $O$  为  $BD$  中点，

所以  $OF \perp BD$ ，又  $AC \perp OF$ ，所以  $OF \perp$  平面  $ABCD$ ， .....6 分

因为  $OA, OB, OF$  两两垂直，则以点  $O$  为坐标原点， $OA, OB, OF$  所在的直线为  $x, y, z$  轴建立空间直角坐标系  $O-xyz$ ，

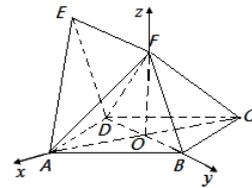
因为  $AB = 2$ ， $\angle DAB = 60^\circ$ ，所以  $AB = BD = BF = 2$ ， $OF = \sqrt{3}$ ，

$A(\sqrt{3}, 0, 0), B(0, 1, 0), F(0, 0, \sqrt{3}), E(0, -2, \sqrt{3})$ ，

设平面  $AEF$  的法向量为  $\vec{n} = (x_1, y_1, z_1)$ ， $\vec{AE} = (-\sqrt{3}, -2, \sqrt{3})$ ，

$\vec{AF} = (-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3})$ ，则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AF} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{3}x_1 - 2y_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \\ -\sqrt{3}x_1 + \sqrt{3}z_1 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n} = (1, 0, 1),$$



.....8 分

设平面  $AFB$  的法向量为  $\vec{m} = (x_2, y_2, z_2)$ ， $\vec{AB} = (-\sqrt{3}, 1, 0)$ ，则

$$\begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AF} = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} -\sqrt{3}x_2 + y_2 = 0 \\ -\sqrt{3}x_2 + \sqrt{3}z_2 = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{m} = (1, \sqrt{3}, 1),$$

所以  $\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{1+1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$ ，

由图形知，二面角  $E-AF-B$  为钝角，所以其余弦值为  $-\frac{\sqrt{10}}{5}$  .....12 分

20. 解 (1)  $f(x) = \cos x \sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}(2\cos^2 x - 1)$

$$= \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).$$

当  $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，即  $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi (k \in \mathbf{Z})$  时，函数  $f(x)$  取最大值，且最大值为 1.

(2) 由(1)知，函数  $f(x)$  图象的对称轴为  $x = \frac{5}{12}\pi + k\pi (k \in \mathbf{Z})$ ，

$\therefore$  当  $x \in (0, \pi)$  时，对称轴为  $x = \frac{5}{12}\pi$ .

又方程  $f(x) = \frac{2}{3}$  在  $(0, \pi)$  上的解为  $x_1, x_2$ .  $\therefore x_1 + x_2 = \frac{5}{6}\pi$ ，则  $x_1 = \frac{5}{6}\pi - x_2$ ，

$$\therefore \cos(x_1 - x_2) = \cos\left(\frac{5}{6}\pi - 2x_2\right) = \sin\left(2x_2 - \frac{\pi}{3}\right),$$

$$\text{又 } f(x_2) = \sin\left(2x_2 - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}, \text{ 故 } \cos(x_1 - x_2) = \frac{2}{3}.$$

21.解: (1) 由频率分布直方图得, 得分为 17, 18 的人数分别为 6 人, 12 人,

由题意知两人得分之和不大于 35 分: 为两人得分均为 17 分, 或两人中 1 人 17 分, 1 人 18 分.

$$P = \frac{C_6^2 + C_6^1 C_{12}^1}{C_{100}^2} = \frac{29}{1650} \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$(2) \bar{x} = 160 \times 0.06 + 170 \times 0.12 + 180 \times 0.34 + 190 \times 0.30 + 200 \times 0.1 + 210 \times 0.08 = 185 \text{ (个)} \quad 5 \text{ 分}$$

又  $\sigma^2 \approx 169$ ,  $\sigma = 13$ , 所以正式测试时,  $\mu = 195$ ,  $\sigma = 13$ ,  $\therefore \mu - \sigma = 182$ .

$$(i) \therefore P(X > 182) = 1 - \frac{1 - 0.6826}{2} = 0.8413,$$

$$\therefore 0.8413 \times 2000 = 1682.6 \approx 1683. \text{ (人)} \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

(ii) 由正态分布模型, 全年所有学生中任取 1 人, 每分钟跳绳个数 195 以上的概率为 0.5,

即  $\xi \sim B(3, 0.5)$ ,

$$\therefore P(\xi = 0) = C_3^0 (1 - 0.5)^3 = 0.125,$$

$$P(\xi = 1) = C_3^1 0.5 \cdot (1 - 0.5)^2 = 0.375,$$

$$P(\xi = 2) = C_3^2 0.5^2 \cdot (1 - 0.5) = 0.375,$$

$$P(\xi = 3) = C_3^3 0.5^3 = 0.125, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$\therefore \xi$  的分布列为

$\xi$	0	1	2	3
P	0.125	0.375	0.375	0.125

$$E(\xi) = 1.5 \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$22. \text{解: (1) } f'(x) = 2x + a - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + ax - 1}{x} \leq 0 \text{ 在 } [1, 2] \text{ 上恒成立,}$$

即  $2x^2 + ax - 1 \leq 0$  在  $[1, 2]$  上恒成立, 所以  $a \leq -2x + \frac{1}{x}$  在  $[1, 2]$  上恒成立,

设  $h(x) = -2x + \frac{1}{x}$ , 则  $h(x)$  在  $[1, 2]$  上单调递减, 所以  $h(x)_{\min} = h(2) = -\frac{7}{2}$  所以  $a \leq -\frac{7}{2}$

(2) 解: 存在, 假设存在实数  $a$ , 使  $g(x) = f(x) - x^2 = ax - \ln x (x \in (0, e])$  有最小值 3,

$$g'(x) = a - \frac{1}{x} = \frac{ax-1}{x}$$

①当  $a \leq 0$  时,  $g'(x) < 0$ , 则  $g(x)$  在  $(0, e]$  上单调递减,

所以  $g(x)_{\min} = g(e) = ae - 1 = 3$ , 解得  $a = \frac{4}{e}$  (舍去);

②当  $0 < \frac{1}{a} < e$  时, 当  $x \in (0, \frac{1}{a})$ , 则  $g'(x) < 0$ ; 当  $x \in (\frac{1}{a}, e)$ , 则  $g'(x) > 0$ ,

所以  $g(x)$  在  $(0, \frac{1}{a})$  上单调递减, 在  $(\frac{1}{a}, e]$  上单调递增,

$\therefore g(x)_{\min} = g(\frac{1}{a}) = 1 + \ln a = 3$ , 解得  $a = e^2$ , 满足条件;

③当  $\frac{1}{a} \geq e$  时,  $g'(x) < 0$ , 则  $g(x)$  在  $(0, e]$  上单调递减,

所以  $g(x)_{\min} = g(e) = ae - 1 = 3$ , 解得  $a = \frac{4}{e}$  (舍去),

综上, 存在实数  $a = e^2$ , 使得当  $x \in (0, e]$  时  $g(x)$  有最小值 3.

(3) 证明: 令  $F(x) = e^2x - \ln x$ , 由 (2) 知,  $F(x)_{\min} = 3$ ,

令  $\varphi(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{2}$ , 则  $\varphi'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ,

当  $0 < x \leq e$  时,  $\varphi'(x) \geq 0$ , 则  $\varphi(x)$  在  $(0, e]$  上单调递增,

$\therefore \varphi(x)_{\max} = \varphi(e) = \frac{1}{e} + \frac{5}{2} < \frac{1}{2} + \frac{5}{2} = 3$

$\therefore e^2x - \ln x > \frac{\ln x}{x} + \frac{5}{2}$ , 即  $e^2x^2 > (x+1)\ln x + \frac{5}{2}x$ 。

补充题: 已知函数  $f(x) = kx + \frac{1}{x}$  ( $k \neq 0$ ),  $g(x) = \lambda \ln x$  ( $\lambda \in \mathbf{R}$ ), 且函数  $f(x)$  的图像在点  $(1, f(1))$  处的切线方程为  $2x + y - 2 = 0$ .

(1) 求实数  $k$  的值;

(2) 函数  $h(x) = g(x) + f(x)$ , 设函数  $h(x)$  有两个极值点为  $x_1, x_2$ , 其中  $x_1 < x_2$ , 试比较  $h(x_1)$  与  $h(x_2)$  的大小.

解: (1) 由题意知,  $f(1) = k + 1$ , 所以切点为  $(1, k + 1)$ , .....1 分

且  $f(x) = kx + \frac{1}{x}$  的定义域为  $\{x | x \neq 0\}$ , 所以  $f'(x) = k - \frac{1}{x^2}$ ,

则  $f'(1) = k - 1 = -2$ , 所以  $k = -1$ , 故  $f(x) = \frac{1}{x} - x$ . .....3 分

(2) 由 (1) 知,  $h(x) = \lambda \ln x + \frac{1}{x} - x$ , ( $x > 0$ ), 所以

$$h'(x) = \frac{-x^2 + \lambda x - 1}{x^2} = \frac{-(x^2 - \lambda x + 1)}{x^2},$$

$h(x)$  有两个极值点当且仅当  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \lambda > 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda > 2,$

此时  $h(x)$  在  $(0, \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2})$  和  $(\frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, +\infty)$  上单调递减;  $(\frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2}, \frac{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4}}{2})$  上单调递增。

由于  $h(x)$  的两个极值点  $x_1, x_2$  满足方程  $x^2 - \lambda x + 1 = 0,$

所以  $x_1 + x_2 = \lambda, x_1 x_2 = 1,$  所以  $x_2 = \frac{1}{x_1},$  因为  $0 < x_1 < x_2,$  所以  $0 < x_1 < 1 < x_2.$

$$\begin{aligned} h(x_1) - h(x_2) &= \lambda \ln x_1 + \frac{1}{x_1} - x_1 - (\lambda \ln x_2 + \frac{1}{x_2} - x_2) \\ &= \lambda \ln x_1 + \frac{1}{x_1} - x_1 - (-\lambda \ln x_1 + x_1 - \frac{1}{x_1}) \\ &= 2\lambda \ln x_1 + \frac{2}{x_1} - 2x_1 \\ &= 2[(x_1 + \frac{1}{x_1}) \ln x_1 + \frac{1}{x_1} - x_1] \end{aligned}$$

令  $m(x) = (x + \frac{1}{x}) \ln x + \frac{1}{x} - x, (0 < x < 1)$

$$\text{所以 } m'(x) = \frac{(x^2 - 1) \ln x}{x^2}$$

因为  $0 < x < 1$  时,  $x^2 - 1 < 0, \ln x < 0,$  则  $m'(x) > 0,$

所以  $m(x)$  在  $(0, 1)$  上单调递增,

所以  $m(x) < m(1) = 0,$  即  $h(x_1) - h(x_2) < 0,$

所以  $h(x_1) < h(x_2).$