2020年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷模拟）参考答案

数学Ⅰ试题

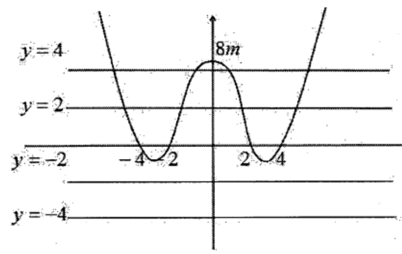
一、填空题

1．4　　2．$1+i$　　3．0.37　　4．17　　5．7　　6．$[\frac{1}{4},1]\cup[4,+\infty)$　　7．2

8．1　　9．4　　10．$\frac{7\pi}{6}$　　11．$(\frac{1}{2},2)$　　12．8　　13．$[\frac{1}{2},3]$　　14．-1

填空题参考解答或提示

11．函数 $f(x)$ 的图象可画，交于 y 轴于点 $(0,8m)$，在 $x=\pm3$ 时取得最小值 $-m$；函数 $y=f(f(x))$ 恰有八个不同的零点，则 $f(f(x))=0$ 有八个根，令 $t=f(x)$，则 $f(t)=0$，解得 $t=\pm2,\pm4$，所以



$f(x)=\pm2,\pm4$ 有八个根，即 $y=f(x)$ 的图象与 $y=4,y=2,y=-2,y=-4$ 有八个交点，

如图所示，则 $\begin{cases}8m>4\\-m>-2\end{cases}$，解得 $\frac{1}{2}<m<2$．

12．由已知得圆的半径为2，则内接正三角形的边长为 $2\sqrt{3}$，且圆心 O 为三角形的重心，令 BC 中点为 M，连结 AM，令 AM 中点为 Q，则 $AM=3,OM=1,QM=\frac{3}{2},OQ=\frac{1}{2}$，

$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{PM}$，所以 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PM}=2(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QA})(\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QM})$，又因为 $\overrightarrow{QA}=-\overrightarrow{QM}$，所以原式 $=2(PQ^2-QM^2)=2PQ^2-\frac{9}{2}$，$P$ 是圆 O 上一点，Q 为 AM 中点，所以 PQ 的最大值即为圆心 O 到点 Q 的距离加上半径，即 $PQ_{\max}=OQ+r=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}$，

所以原式 $=2PQ_{\max}^2-\frac{9}{2}=\frac{25}{2}-\frac{9}{2}=8$．

13．设 $m=a+b$，$n=\frac{2}{a}+\frac{3}{b}$，则 $m+n=4\sqrt{3}$，$m\cdot n=(a+b)(\frac{2}{a}+\frac{3}{b})=2+\frac{3a}{b}+\frac{2b}{a}+3$，

由基本不等式可得 $m\cdot n\le(\frac{m+n}{2})^2=12$，所以 $\frac{2b}{a}+\frac{3a}{b}+5\le12$，即 $2(\frac{b}{a})^2-7(\frac{b}{a})+3\le0$，

$(2\cdot\frac{b}{a}-1)(\frac{b}{a}-3)\le0$，解得 $\frac{1}{2}\le\frac{b}{a}\le3$．

14．函数$f(x)=-x^2e^{-x-a}+\ln x-a$，不等式$f(x)\le 0$恒成立，则$-x^2e^{-x-a}+\ln x-a\le 0$，

在$(0,+\infty)$上恒成立，可得$-x^2e^{-x-a}\le a-\ln x$，$\frac{x}{e^a}(-x)e^{-x}\le \ln\frac{e^a}{x}$，即$(-x)e^{-x}\le \frac{e^a}{x}\ln\frac{e^a}{x}$，

设$h(x)=x\cdot e^x$，$x\in(0,+\infty)$，则$h(-x)\le h(\ln\frac{e^a}{x})$，易得$h(x)$在$(0,+\infty)$上为增函数，所

以$-x\le \ln\frac{e^a}{x}$，即$a\ge \ln x-x$，设$y=\ln x-x, x\in(0,+\infty)$，$y'=\frac{1}{x}-1$，$y'=0$得$x=1$，

$x\in(0,1), y'>0$，$x\in(1,+\infty), y'<0$，所以$x=1$时$y_{\max}=-1$，所以$a\ge -1$．

二、解答题

15（1）因为$\vec{m}\perp\vec{n}$，所以$\vec{m}\cdot\vec{n}=0$，

因为$\vec{m}\cdot\vec{n}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos A+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin A=\sin(A-\frac{\pi}{4})$，所以$\sin(A-\frac{\pi}{4})=0$，

因为$0<A<\pi$，所以$-\frac{\pi}{4}<A-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，所以$A-\frac{\pi}{4}=0$，即$A=\frac{\pi}{4}$　　(6 分)

（2）因为ΔABC的外接圆的半径为$\sqrt{2}$，

所以$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}2\sqrt{2}\sin B\cdot 2\sqrt{2}\sin C\cdot\sin A=2\sqrt{2}\sin B\sin C$

$=2\sqrt{2}\sin B\sin(\frac{3\pi}{4}-B)=2\sqrt{2}\sin B(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos B+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin B)$

$=2\sin B\cos B+2\sin^2 B=\sin 2B-\cos 2B+1=\sqrt{2}\sin(2B-\frac{\pi}{4})+1$

即$\sqrt{2}\sin(2B-\frac{\pi}{4})+1=2$，$\sin(2B-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$

因为$0<B<\frac{3\pi}{4}$，所以$-\frac{\pi}{4}<2B-\frac{\pi}{4}<\frac{5\pi}{4}$

所以$2B-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$或$2B-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$

解得$B=\frac{\pi}{4}$或$B=\frac{\pi}{2}$　　(14 分)

16.（1）连结 A_1M；

因为 M,N 分别为棱 AB,BC 的中点，所以 $MN // AC$．

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $AC // A_1C_1$，

所以 $MN // A_1C_1$，从而 M,N,A_1,C_1 四点共面

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $A_1B_1 // AB$，即 $A_1Q // MB$

因为 M,Q 分别为棱 AB,A_1B_1 的中点，所以 $A_1Q = MB$，

所以四边形 A_1MBQ 为平行四边形，从而 $A_1M // BQ$

又 $A_1M \subset$ 平面 MNC_1， $BQ \not\subset$ 平面 MNC_1，所以 $BQ //$ 平面 MNC_1 （7 分）

（2）由（1）得 $MN = \frac{1}{2}AC = 1, CN = \frac{1}{2}BC = 1$

在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $CC_1 \perp$ 平面 ABC，又 $BC, MN \subset$ 平面 ABC，

所以 $CC_1 \perp MN$， $CC_1 \perp BC$，

从而 $C_1N = \sqrt{CC_1^2 + CN^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$

又 $C_1M = \sqrt{5}$，所以 $C_1M^2 = MN^2 + C_1N^2$，从而 $C_1N \perp MN$

又 $CC_1 \perp MN$， $CC_1 \cap C_1N = C_1$， $CC_1, C_1N \subset$ 平面 B_1BCC_1

所以 $MN \perp$ 平面 B_1BCC_1，又 $MN \subset$ 平面 MNC_1，所以平面 $MNC_1 \perp$ 平面 B_1BCC_1．(7 分)

17.（1）设 $AP = x\ cm$，则 $DP = (6-x)\ cm$．

在 ΔDPE 中， $\angle PDE = \frac{\pi}{2}, \angle DPE = \pi - 2\times\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$， $DP = (6-x)\ cm, EP = x\ cm$，

所以 $\cos\angle DPE = \frac{6-x}{x}$，

因为 $\angle APQ = \frac{\pi}{3}$，则 $\angle EPQ = \frac{\pi}{3}$，所以 $\angle DPE = \frac{\pi}{3}$，即 $\cos\angle DPE = \frac{1}{2}$，

所以 $\frac{6-x}{x} = \frac{1}{2}$，解得 $x = 4$，

在 ΔAQP 中， $AP = x\ cm = 4\ cm$， $\angle APQ = \frac{\pi}{3}$，所以 $AQ = 4\sqrt{3}\ cm$．

所以$S_{四边形APEQ}=2S_{\Delta APQ}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4\sqrt{3}=16\sqrt{3}\ cm^2$.　　(6 分)

（2）设$AP=x\ cm$，则$DP=(6-x)\ cm$，设$\angle APQ=\theta$.

在ΔDPE中，$\angle PDE=\frac{\pi}{2},\angle DPE=\pi-2\theta$，$DP=(6-x)\ cm,EP=x\ cm$，

所以$\cos(\pi-2\theta)=\frac{6-x}{x}$，解得$x=\frac{3}{\sin^2\theta}$.

在ΔAQP中，$AP=x\ cm=\frac{3}{\sin^2\theta}\ cm\le 6\ cm$，所以$\sin^2\theta\ge\frac{1}{2}$，解得$\theta\ge\frac{\pi}{4}$，

因为$AQ=AP\cdot\tan\theta=\frac{3}{\sin\theta\cos\theta}\le 12\ cm$，所以$\sin 2\theta\ge\frac{1}{2}$，解得$\frac{\pi}{12}\le\theta\le\frac{5\pi}{12}$，

综上$\frac{\pi}{4}\le\theta\le\frac{5\pi}{12}$，

而$PQ=\frac{AP}{\cos\theta}=\frac{3}{\sin^2\theta\cos\theta}\ cm=\frac{3}{(1-\cos^2\theta)\cos\theta}\ cm$.

令$t=\cos\theta$，则$t\in[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}]$，

记$f(t)=-t^3+t$，$t\in[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}]$，

因为$f'(t)=-3t^2+1$，所以当$t\in[\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},\frac{\sqrt{3}}{3})$时，$f'(t)>0$，所以$f(t)$为单调递增，

当$t\in(\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{2}}{2})$时，$f'(t)<0$，所以$f(t)$为单调递减.

所以$f(t)_{\max}=-(\frac{\sqrt{3}}{3})^3+\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$，

所以PQ的最小值为$\frac{9\sqrt{3}}{2}\ cm$. (14 分)

18.（1）由椭圆定义知ΔF_2AB的周长为$4a$，

所以$4a=8$，所以$a=2$又离心率$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，所以$c=1$，所以$b=\sqrt{3}$

所以椭圆C的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.　　(4 分)

（2）当$l\perp x$轴，$\overrightarrow{PB}\neq 2\overrightarrow{AP}$

所以可设l：$y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$

则$\begin{cases} y=kx+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$，消去$y$得$(3+4k^2)x^2+8kx-8=0$

所以$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-8k}{3+4k^2} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{-8}{3+4k^2} \end{cases}$

因为$\overrightarrow{PB}=2\overrightarrow{AP}$，

所以$x_2-0=-2x_1$，即$x_2=-2x_1$，联立化简得

$\begin{cases} -x_1=\dfrac{-8k}{3+4k^2} \\ -2x_1^2=\dfrac{-8}{3+4k^2} \end{cases}$，所以$(\dfrac{8k}{3+4k^2})^2=\dfrac{4}{3+4k^2}$

解得$k=\pm\dfrac{1}{2}$

所以直线l方程为：$y=\pm\dfrac{1}{2}x+1$　　(10分)

（3）当$AB//x$轴时，A,B两点关于y轴对称，点$M(0,3)$在y轴上，所以可知$k_1+k_2=0$，

此时存在$\lambda=1$使得$k_1+\lambda k_2=0$成立，

下面证明当$\lambda=1$时$k_1+\lambda k_2=0$恒成立

$$k_1+k_2=\frac{y_1-3}{x_1}+\frac{y_2-3}{x_2}=\frac{kx_1+1-3}{x_1}+\frac{kx_2+1-3}{x_2}=2k-2(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2})$$

因为$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{-8k}{3+4k^2} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{-8}{3+4k^2} \end{cases}$，所以$k_1+k_2=2k-2(\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2})=2k-2\dfrac{\frac{-8k}{3+4k^2}}{\frac{-8}{3+4k^2}}=2k-2k=0$，

所以$k_1+k_2=0$恒成立，即存在$\lambda=1$，使得$k_1+\lambda k_2=0$恒成立.　　(16分)

19．解：(1) 当$a=-1$时，函数$f(x)=-x+\frac{1}{x}-b\ln x\ (x>0)$，

$$f'(x)=-1-\frac{1}{x^2}-\frac{b}{x}=-\frac{x^2+bx+1}{x^2}\ (x>0)$$

又因为函数$f(x)$为单调减函数，所以$f'(x)\le 0$恒成立，

所以$x^2+bx+1\ge 0$在$(0,+\infty)$上恒成立，即$b\ge -(x+\frac{1}{x})$，$(x>0)$，所以$b\ge -2$．(4 分)

(2) 当$a+b=1$时，$f(x)=ax+\frac{1}{x}-(1-a)\ln x$，

$$f'(x)=a-\frac{1}{x^2}+\frac{a-1}{x}=\frac{ax^2+(a-1)x-1}{x^2}=\frac{(x+1)(ax-1)}{x^2}$$

①当$a\leqslant 0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$是$(0,+\infty)$上的减函数，$f(x)$无最小值，舍去；6 分

②当$a>0$时，由$f'(x)>0$得，$x>\frac{1}{a}$，$f(x)$在$(0,\frac{1}{a})$上单调递减，在$(\frac{1}{a},+\infty)$上单调递增，

所以$f(x)$的最小值为$f(\frac{1}{a})=1+a+(1-a)\ln a$．

由$1+a+(1-a)\ln a=2$，得$(a-1)(1-\ln a)=0$，解得$a=1$，或$a=\mathrm{e}$．(10 分)

(3) 对任意给定的正实数a,b,有$f(x)=ax+\frac{1}{x}-b\ln x>ax-b\ln x$，

设$g(x)=ax-b\ln x$，则$g'(x)=\frac{ax-b}{x}$，

所以$g(x)$在$(0,\frac{b}{a})$上单调递减，在$(\frac{b}{a},+\infty)$上单调递增，$g(x)_{\min}=g(\frac{b}{a})=b(1-\ln\frac{b}{a})$．

①当$\frac{b}{a}\leqslant \mathrm{e}$时，$g(x)\geqslant 0$恒成立，所以存在$x_0=\frac{b}{a}$，当$x>x_0$时,$g(x)>0$,

即当$x>x_0$时,$f(x)>0$．

②当$\frac{b}{a}>\mathrm{e}$时，$g(\frac{b}{a})<0$，以下证明$\frac{b}{a}<\mathrm{e}^{\frac{b}{a}}$，且$g(\mathrm{e}^{\frac{b}{a}})>0$．　　(14 分)

令$\frac{b}{a}=x>\mathrm{e}$，$h(x)=\mathrm{e}^x-x^2$，则$h'(x)=\mathrm{e}^x-2x$，

因为$(\mathrm{e}^x-2x)'=\mathrm{e}^x-2>0$，所以$h'(x)=\mathrm{e}^x-2x$是$(\mathrm{e},+\infty)$上的增函数，

由$h'(x)>h'(\mathrm{e})>0$，得$h(x)=\mathrm{e}^x-x^2$是$(\mathrm{e},+\infty)$上的增函数，

所以$h(x)>h(\mathrm{e})>0$，故当$x>\mathrm{e}$时，$\mathrm{e}^x>x^2>x$．

故$\frac{b}{a}<\mathrm{e}^{\frac{b}{a}}$，$g(\mathrm{e}^{\frac{b}{a}})=a\cdot\mathrm{e}^{\frac{b}{a}}-b\ln\mathrm{e}^{\frac{b}{a}}=a[\mathrm{e}^{\frac{b}{a}}-(\frac{b}{a})^2]>0$，由零点存在性定理知，存在

$x_0\in(\frac{b}{a},\mathrm{e}^{\frac{b}{a}})$，使$g(x_0)=0$，故当$x>x_0$时,$g(x)>0$,即当$x>x_0$时,$f(x)>0$．　　(16 分)

20．解：（1）当$n=1$时，$2p=2a_2-6$，所以$a_2=p+3$，

当$n=2$时，$p(2+a_2)=a_2a_3-6$，即$(p+2)(p+3)=(p+3)a_3$，

因为$a_2=p+3>0$，所以$a_3=p+2$，

又$S_3=13$，所以$2p+7=13$，解得$p=3$．（4分）

此时$a_2=6,a_3=5$．

又当$n\geq 2$时，$3S_{n-1}=a_{n-1}a_n-6$，

所以$3a_n=a_n(a_{n+1}-a_{n-1})$，

因为$a_n>0$，所以$a_{n+1}-a_{n-1}=3$，（6分）

所以数列$\{a_n\}$的奇数项与偶数项分别构成公差为3的等差数列，

从而，$a_n=\begin{cases}\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}, n\text{为奇数},\\ \frac{3}{2}n+3,\ n\text{为偶数}.\end{cases}$（8分）

（2）假设存在正整数$s, t, k\ (s<t<k)$，使a_s,a_t,a_k成等比数列，且s, t, k成等差数列，

则$s+k=2t,a_sa_k=a_t^2$．

（i）若s, t, k均为奇数，则$\frac{1}{2}(3s+1)\cdot\frac{1}{2}(3k+1)=\frac{1}{4}(3t+1)^2$，

即$9sk+3(s+k)+1=9t^2+6t+1$．

又$s+k=2t$，所以$9sk=9t^2$，即$t^2=sk$，

由$\begin{cases}s+k=2t\\ t^2=sk\end{cases}$得，$s=t=k$，此时与$s<t<k$矛盾．

因此，满足条件的s, t, k不存在．（12分）

（ii）若s, t, k均为偶数，则$\frac{1}{2}(3s+6)\cdot\frac{1}{2}(3k+6)=\frac{1}{4}(3t+6)^2$．

与（i）同理，可知满足条件的s, t, k不存在．

（iii）若s, k为奇数,t为偶数，则$\frac{1}{2}(3s+1)\cdot\frac{1}{2}(3k+1)=\frac{1}{4}(3t+6)^2$，

即$9sk+6t+1=9t^2+36t+36$，

所以$3(3sk-10t-3t^2)=35$．

因为s, t, k均为正整数，所以上式左边为3的倍数，但35不能被3整除，从而矛盾，

因此，满足条件的s, t, k不存在．

（iv）若 s, k 为偶数，t 为奇数，则 $\frac{1}{2}(3s+6)\cdot\frac{1}{2}(3k+6)=\frac{1}{4}(3t+1)^2$，

即 $9sk+36t+36=9t^2+6t+1$，

所以 $3(3t^2-3sk-10t)=35$.

与（iii）同理，满足条件的 s, t, k 不存在.

综上，满足条件的 s, t, k 不存在.　　　　　　　　　　(16 分)

数学Ⅱ（附加题）

21．A．解：因为 $M=BA=\begin{bmatrix}8&5\\6&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&-5\\6&-3\end{bmatrix}$，　　　　　　　　(5 分)

所以 $M^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&\frac{5}{6}\\-1&\frac{4}{3}\end{bmatrix}$.　　　　　　　　　　　　(10 分)

B．曲线 $C:\rho=4\sin\theta$ 的直角坐标方程为 $x^2+(y-2)^2=4$，

直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x-y+1=0$　　　　　　　　　　(4 分)

圆心到直线的距离 $d=\frac{|0\cdot\sqrt{3}-1\cdot2+1|}{2}=\frac{1}{2}$，

所以 $AB=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{4-\frac{1}{4}}=\sqrt{15}$　　　　　　　　(10 分)

C．由柯西不等式得：

$\sqrt{3x+12}+\sqrt{12-x}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{x+4}+1\cdot\sqrt{12-x}\le\sqrt{[(\sqrt{3})^2+1^2]\cdot[(\sqrt{x+4})^2+(\sqrt{12-x})^2]}=8$

所以函数 $f(x)$ 的最大值为 8.　　　　　　　　　　　　(10 分)

22．由题意可得抛掷小正方体一次，记下的数字为 1 的概率是 $\frac{2}{3}$，记下的数字是 2 的概率是 $\frac{1}{3}$.

（1）设“抛掷三次记下的数字不全相同”为事件 A，则 A 由 1,2,2 和 1,1,2 两种可能，

所以$P(A)=C_3^1\cdot\frac{2}{3}\cdot(\frac{1}{3})^2+C_3^1\cdot\frac{1}{3}\cdot(\frac{2}{3})^2=\frac{2}{3}$.　　　(3 分)

（2）由题意可知ξ的所有可能值为$3,4,5,6$.

则$P_{(\xi=3)}=(\frac{2}{3})^3=\frac{8}{27}$；

$P_{(\xi=4)}=C_3^1\cdot(\frac{1}{3})\cdot(\frac{2}{3})^2=\frac{4}{9}$

$P_{(\xi=5)}=C_3^1\cdot(\frac{2}{3})\cdot(\frac{1}{3})^2=\frac{2}{9}$

$P_{(\xi=6)}=(\frac{1}{3})^3=\frac{1}{27}$

所以ξ的分布列如下：

ξ	3	4	5	6
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{27}$

所以$E(\xi)=3\times\frac{8}{27}+4\times\frac{4}{9}+5\times\frac{2}{9}+6\times\frac{1}{27}=4$.　　　(10 分)

23.（1）因为$a_{n+1}=a_n-a_n^2\le a_n$，

所以$a_n\le a_{n-1}\le a_{n-2}\le\cdots\le a_1=\frac{1}{2}$，所以$a_n\le\frac{1}{2}$.　　　(3 分)

（2）当$n=1$时，$a_2=\frac{1}{4}\ge\frac{1}{2\times1+2}$，命题成立.

假设当$n=k$时命题成立，即$a_{k+1}\ge\frac{1}{2k+2}$，则由（1）得$\frac{1}{2k+2}\le a_{k+1}\le\frac{1}{2}$.

当$n=k+1$时，由$y=x-x^2$在$(0,\frac{1}{2}]$上单调递增可得$a_{k+2}=a_{k+1}-a_{k+1}^2$在$[\frac{1}{2k+2},\frac{1}{2}]$上单调递增，

所以$a_{k+2}\ge\frac{1}{2k+2}-(\frac{1}{2k+2})^2=\frac{2k+1}{(2k+2)^2}=\frac{(2k+1)(2k+4)}{(2k+2)^2(2k+4)}=\frac{(2k+2)^2+2k}{(2k+2)^2(2k+4)}$

$\frac{1}{2k+4}+\frac{2k}{(2k+2)^2(2k+4)}>\frac{1}{2k+4}$，

所以当$n=k+1$时命题也成立．综上，$a_{n+1}\ge\frac{1}{2n+2}$.　　　(10 分)