

§1.4 不等式与不等关系

复习目标

1. 会比较两个数(式)的大小;
2. 理解不等式的性质;
3. 掌握不等式性质的简单应用.

课前热身

1. 若 $M=(x-3)^2$, $N=(x-2)(x-4)$, 则有()

A. $M>N$ B. $M\geq N$ C. $M<N$ D. $M\leq N$

2. 设 $a>b$, $a, b, c\in\mathbf{R}$, 则下列式子正确的是()

A. $ac>bc$ B. $\frac{a}{b}>1$ C. $a-c>b-c$ D. $a^2>b^2$

3. 若 $a>b>0$, $c<d<0$, 则一定有()

A. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$ B. $\frac{a}{d}<\frac{b}{c}$ C. $\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$ D. $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

4. (多选)下列命题为真命题的是()

A. 若 $a>b>0$, 则 $ac^2>bc^2$ B. 若 $a<b<0$, 则 $a^2>ab>b^2$
C. 若 $a>b>0$ 且 $c<0$, 则 $\frac{c}{a^2}>\frac{c}{b^2}$ D. 若 $a>b$ 且 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$, 则 $ab<0$

5. $e^\pi \cdot \pi^e$ 与 $e^e \cdot \pi^\pi$ 的大小关系为_____.

6. 若 $1<a<3$, $-4<\beta<2$, 则 $\frac{\alpha}{2}-\beta$ 的取值范围是_____.

知识梳理

典例研究

考点一 比较两个数（式）的大小

例 1. (1) 若 $a < 0, b < 0$, 则 $p = \frac{b^2}{a} + \frac{a^2}{b}$ 与 $q = a + b$ 的大小关系为()

- A. $p < q$ B. $p \leq q$ C. $p > q$ D. $p \geq q$

(2) 已知 $a > b > 0$, 则 $p = a^a b^b$ 与 $q = a^b b^a$ 的大小关系为()

- A. $p > q$ B. $p \geq q$ C. $p < q$ D. $p \leq q$

(3) 若 $a = \frac{\ln 3}{3}, b = \frac{\ln 4}{4}, c = \frac{\ln 5}{5}$, 则()

- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $c < a < b$ D. $b < a < c$

考点二 不等式的基本性质

例 2. (1) 下列命题中正确的是()

- A. 若 $a > b, c \in \mathbf{R}$, 则 $ac > bc$ B. 若 $a > b, c < d$, 则 $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

- C. 若 $a > b, c > d$, 则 $a - c > b - d$ D. 若 $ab > 0, a > b$, 则 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

(2) (多选) 设 $b > a > 0, c \in \mathbf{R}$, 则下列不等式中正确的是()

- A. $a^{\frac{1}{a}} < b^{\frac{1}{b}}$ B. $\frac{1}{a} - c > \frac{1}{b} - c$ C. $\frac{a+2}{b+2} > \frac{a}{b}$ D. $ac^2 < bc^2$

(3) (多选) 若 $\frac{1}{a} < \frac{1}{b} < 0$, 则下列不等式中正确的是()

- A. $\frac{1}{a+b} < \frac{1}{ab}$ B. $|a| + b > 0$ C. $a - \frac{1}{a} > b - \frac{1}{b}$ D. $\ln a^2 > \ln b^2$

考点三 不等式性质的综合应用

例 3 (1) 已知 $-1 < x < 4$, $2 < y < 3$, 则 $x-y$ 的取值范围是_____ , $3x+2y$ 的取值范围是_____ .

(2) 已知 $3 < a < 8$, $4 < b < 9$, 则 $\frac{a}{b}$ 的取值范围是_____ .

变式 1: 将本例 (1) 条件改为 “ $-1 < x < y < 3$ ”, 求 $x-y$ 的取值范围.

变式 2: 将本例 (1) 条件改为 “已知 $-1 < x-y < 4$, $2 < x+y < 3$ ”, 求 $3x+2y$ 的取值范围.

课堂小结

跟踪反馈

- 若 a, b 都是实数, 则“ $\sqrt{a}-\sqrt{b}>0$ ”是“ $a^2-b^2>0$ ”的()
A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分又不必要条件
- 已知 $a_1 \in (0, 1)$, $a_2 \in (0, 1)$, 记 $M = a_1 a_2$, $N = a_1 + a_2 - 1$, 则 M 与 N 的大小关系是()
A. $M < N$ B. $M > N$ C. $M = N$ D. 不确定
- (多选)已知 $c < b < a$, 且 $ac < 0$, 那么下列不等式中, 一定成立的是()
A. $ab > ac$ B. $c(b-a) > 0$ C. $cb^2 < ab^2$ D. $ac(a-c) < 0$
- (多选)若 $0 < a < 1$, $b > c > 1$, 则()

A. $\left(\frac{b}{c}\right)^a > 1$ B. $\frac{c-a}{b-a} > \frac{c}{b}$ C. $c^{a-1} < b^{a-1}$ D. $\log_c a < \log_b a$

5. 设 $f(x) = ax^2 + bx$ ，若 $1 \leq f(-1) \leq 2$ ， $2 \leq f(1) \leq 4$ ，则 $f(-2)$ 的取值范围是_____.

6. 给出三个不等式：① $a^2 > b^2$ ；② $2^a > 2^{b-1}$ ；③ $\sqrt{a-b} > \sqrt{a} - \sqrt{b}$. 能够使以上三个不等式同时成立的一个条件是_____ (答案不唯一，写出一个即可).

纠错补偿

1. 订正： 题号

2. 补偿训练：