

数学试题

2020. 6

一、填空题（本大题共 14 小题，每小题 5 分，共计 70 分．不需要写出解答过程，请将答案填写在答题卡相应的位置上．）

1. 已知集合 $A = \{x | 2 < x < 4\}$ ， $B = \{x | 1 < x < 3\}$ ，则 $A \cup B =$ _____.

2. 若 $z = \frac{a}{1+i} + i$ (i 是虚数单位) 是实数，则实数 a 的值为_____.

3. 某校共有教师 300 人，男学生 1200 人，女学生 1000 人，现用分层抽样从所有师生中抽取一个容量为 125 的样本，则从男学生中抽取的人数为_____.

4. 如图是一个算法的伪代码，其输出的结果为_____.

```

S ← 0
For i From 1 To 4
    S ← S + i
End For
Print S

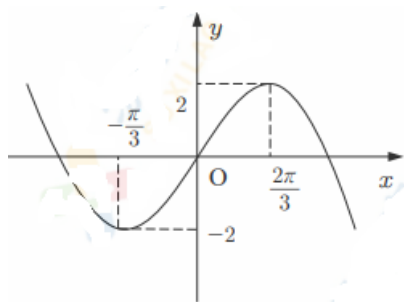
```

第 4 题

第 6 题

5. 将甲、乙、丙三人随机排成一行，则甲、乙两人相邻的概率为_____.

6. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $\omega > 0$ ， $-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 部分图象如图所示，则 $f(\frac{\pi}{2})$ 的值为_____.



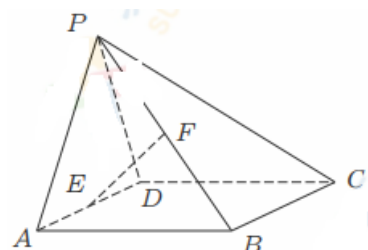
7. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 若 $a_1 = 2$, 且 $a_1, a_2, a_3 - 2$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为_____.
8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F . 若以 F 为圆心, a 为半径的圆交该双曲线的一条渐近线于 A, B 两点, 且 $AB = 2b$, 则该双曲线的离心率为_____.
9. 若正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 则三棱锥 $A-B_1CD_1$ 的体积为_____.
10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ f(-x), & x > 0 \end{cases}$, $g(x) = f(x-2)$, 若 $g(x-1) \geq 1$, 则实数 x 的取值范围为_____.
11. 在平面直角坐标系 xOy 中, A, B 是圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上两个动点, 且 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$, 若 A, B 两点到直线 $l: 3x + 4y - 10 = 0$ 的距离分别为 d_1, d_2 , 则 $d_1 + d_2$ 的最大值为_____.
12. 若对任意 $a \in [e, +\infty)$ (e 为自然对数的底数), 不等式 $x \leq e^{ax+b}$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立, 则实数 b 的取值范围为_____.
13. 已知点 P 在边长为 4 的等边三角形 ABC 内, 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 且 $2\lambda + 3\mu = 1$, 延长 AP 交边 BC 于点 D , 若 $BD = 2DC$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的值为_____.
14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, D 是 BC 的中点. 若 $AD \leq \frac{\sqrt{2}}{2} BC$, 则 $\sin B \sin C$ 的最大值为_____.

二、解答题 (本大题共 6 小题, 共计 90 分. 请在答题纸指定区域内作答, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

15. (本题满分 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$, E, F 分别为 AD, PB 的中点. 求证:

- (1) $EF \parallel$ 平面 PCD ;
- (2) 平面 $PAB \perp$ 平面 PCD .



16. (本题满分 14 分)

已知向量 $\vec{m} = (\cos x, \sin x)$, $\vec{n} = (\cos x, -\sin x)$, 函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} + \frac{1}{2}$.

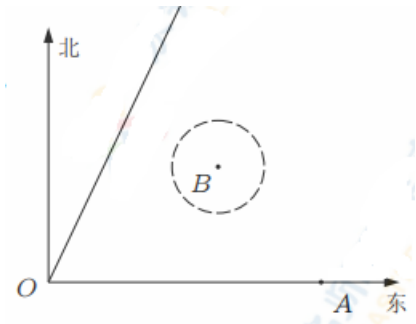
(1) 若 $f(\frac{x}{2}) = 1$, $x \in (0, \pi)$, 求 $\tan(x + \frac{\pi}{4})$ 的值;

(2) 若 $f(\alpha) = -\frac{1}{10}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$, $\sin \beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $2\alpha + \beta$ 的值.

17. (本题满分 14 分)

如图, 港口 A 在港口 O 的正东 100 海里处, 在北偏东方向有条直线航道 OD, 航道和正东方向之间有一片以 B 为圆心, 半径为 $8\sqrt{5}$ 海里的圆形暗礁群 (在这片海域行船有触礁危险), 其中 $OB = 20\sqrt{13}$ 海里, $\tan \angle AOB = \frac{2}{3}$, $\cos \angle AOD = \frac{\sqrt{5}}{5}$, 现一艘科考船以 $10\sqrt{5}$ 海里/小时的速度从 O 出发沿 OD 方向行驶, 经过 2 个小时后, 一艘快艇以 50 海里/小时的速度准备从港口 A 出发, 并沿直线方向行驶与科考船恰好相遇.

- (1) 若快艇立即出发, 判断快艇是否有触礁的危险, 并说明理由;
- (2) 在无触礁危险的情况下, 若快艇再等 x 小时出发, 求 x 的最小值.

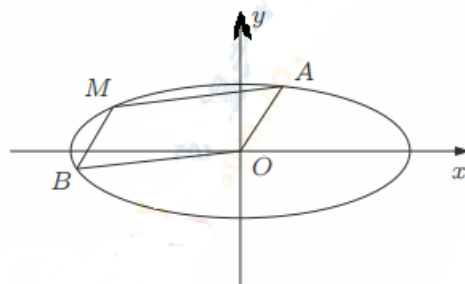


18. (本题满分 16 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(-2, 0)$ 和 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 椭圆 C 上三点 A, M, B 与原点 O 构成一个平行四边形 $AMBO$.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$), 椭圆 C 上三点 A, M, B 与原点 O 构成一个平行四边形 $AMBO$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若点 B 是椭圆 C 左顶点, 求点 M 的坐标;
- (3) 若 A, M, B, O 四点共圆, 求直线 AB 的斜率.



19. (本题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - ax + a} (a \in \mathbb{R})$, 其中 e 为自然对数的底数.

- (1) 若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 的单调减区间;
- (2) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(2) > f(a)$, 求 a 的取值范围;
- (3) 证明: 对任意 $a \in (2, 4)$, 曲线 $y = f(x)$ 上有且仅有三个不同的点, 在这三点处的切线经过坐标原点.

20. (本题满分 16 分)

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $n \geq 2$ 时, $a_n \neq 0$, 则称数列 $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 为 $\{a_n\}$ 的 “L 数列”.

(1) 若 $a_1 = 1$, 且 $\{a_n\}$ 的 “L 数列” 为 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_n = n + k - 3 (k > 0)$, 且 $\{a_n\}$ 的 “L 数列” 为递增数列, 求 k 的取值范围;

(3) 若 $a_n = 1 + p^{n-1}$, 其中 $p > 1$, 记 $\{a_n\}$ 的 “L 数列” 的前 n 项和为 S_n , 试判断是否存在等差数列 $\{c_n\}$, 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $c_n < S_n < c_{n+1}$ 成立, 并证明你的结论.

江苏省仪征中学 2020 届高三下学期数学周三限时训练 6

数学试题

2020. 6

一、填空题 (本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 共计 70 分. 不需要写出解答过程, 请将答案填写在答题卡相应的位置上.)

1. 已知集合 $A = \{x | 2 < x < 4\}$, $B = \{x | 1 < x < 3\}$, 则 $A \cup B =$ _____.

答案: (1, 4)

考点: 集合的并集运算

解析: $\because$ 集合 $A = \{x | 2 < x < 4\}$, $B = \{x | 1 < x < 3\}$,

$$\therefore A \cup B = (1, 4).$$

2. 若 $z = \frac{a}{1+i} + i$ (i 是虚数单位) 是实数, 则实数 a 的值为_____.

答案: 2

考点: 复数

解析: $\because z = \frac{a}{1+i} + i = \frac{a+(2-a)i}{2}$ 是实数, $\therefore$ 实数 a 的值为 2.

3. 某校共有教师 300 人, 男学生 1200 人, 女学生 1000 人, 现用分层抽样从所有师生中抽取一个容量为 125 的样本, 则从男学生中抽取的人数为_____.

答案: 60

考点: 分层抽样

解析: $\frac{125}{300+1200+1000} \times 1200 = 60$.

4. 如图是一个算法的伪代码, 其输出的结果为_____.

```

S ← 0
For i From 1 To 4
    S ← S+i
End For
Print S

```

答案: 10

考点: 伪代码

解析: 第一步: $i=1, S=1$;

第一步: $i=2, S=3$;

第一步: $i=3, S=6$;

第一步: $i=4, S=10$; 故输出的结果为 10.

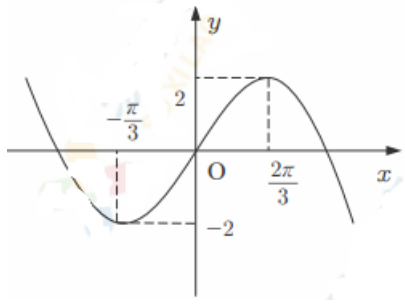
5. 将甲、乙、丙三人随机排成一行, 则甲、乙两人相邻的概率为_____.

答案: $\frac{2}{3}$

考点: 随机事件的概率

解析: $P = \frac{A_2^2 A_2^2}{A_3^3} = \frac{2}{3}$.

6. 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ (其中 $\omega > 0, -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2}$) 部分图象如图所示, 则 $f(\frac{\pi}{2})$ 的值为_____.



答案: $\sqrt{3}$

考点: 三角函数的图像与性质

解析: 首先 $\frac{2\pi}{\omega} = 2[\frac{2\pi}{3} - (-\frac{\pi}{3})]$, 解得 $\omega = 1$,

$$\text{又 } \frac{2\pi}{3} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \because -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2},$$

$$\therefore \varphi = -\frac{\pi}{6}, \text{ 故 } f(x) = 2\sin(x - \frac{\pi}{6}), \text{ 所以 } f(\frac{\pi}{2}) = 2\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{3}.$$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 为等比数列, 若 $a_1 = 2$, 且 $a_1, a_2, a_3 - 2$ 成等差数列, 则 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为_____.

答案: $2^{n+1} - 2$

考点: 等比数列的前 n 项和公式, 等差中项

解析: $\because a_1, a_2, a_3 - 2$ 成等差数列, $\therefore 2a_2 = a_1 + a_3 - 2 = a_3$, 故 $q = 2$,

$$\therefore S_n = \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} = 2^{n+1} - 2$$

8. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的右焦点为 F . 若以 F 为

圆心, a 为半径的圆交该双曲线的一条渐近线于 A, B 两点, 且 $AB = 2b$, 则该双曲线的离心率为_____.

答案: $\frac{\sqrt{6}}{2}$

考点: 双曲线的简单性质

解析：由题意知 $a = \sqrt{2}b$ ，则 $c = \sqrt{3}b$ ，离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}b}{\sqrt{2}b} = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 。

9. 若正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2，则三棱锥 $A-B_1CD_1$ 的体积为_____。

答案： $\frac{8}{3}$

考点：正四面体的体积计算

解析：可知三棱锥 $A-B_1CD_1$ 是以 $2\sqrt{2}$ 为棱长的正四面体，

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \times (2\sqrt{2})^3 = \frac{8}{3}.$$

10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ f(-x), & x > 0 \end{cases}$ ， $g(x) = f(x-2)$ ，若 $g(x-1) \geq 1$ ，则实数 x 的取值

范围为_____。

答案： $[2, 4]$

考点：函数与不等式

解析：首先 $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq 0 \\ -x+2, & x > 0 \end{cases}$ ，由 $g(x) = f(x-2)$ 知 $g(x-1) = f(x-3)$ ，

当 $f(x) \geq 1$ ，解得 $-1 \leq x \leq 1$ ，故 $g(x-1) = f(x-3) \geq 1$ ，得 $-1 \leq x-3 \leq 1$ ，

$\therefore 2 \leq x \leq 4$ ，故实数 x 的取值范围为 $[2, 4]$ 。

11. 在平面直角坐标系 xOy 中， A, B 是圆 $O: x^2 + y^2 = 2$ 上两个动点，且 $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ ，若 $A,$

B 两点到直线 $l: 3x + 4y - 10 = 0$ 的距离分别为 d_1, d_2 ，则 $d_1 + d_2$ 的最大值为_____。

答案： 6

考点：直线与圆综合

解析：取 AB 中点 D ，设 D 到直线 l 的距离为 d ，易知： $d_1 + d_2 = 2d$

$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB} \Rightarrow D$ 轨迹为： $x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow d_{\max} = 3 \Rightarrow d_1 + d_2$ 的最大值为 6。

12. 若对任意 $a \in [e, +\infty)$ (e 为自然对数的底数)，不等式 $x \leq e^{ax+b}$ 对任意 $x \in \mathbb{R}$ 恒成立，

则实数 b 的取值范围为_____。

答案： $[-2, +\infty)$

考点：函数与不等式（恒成立问题）

解析：当 $x \leq 0$ 时，显然成立， $b \in \mathbb{R}$ ；

当 $x > 0$ 时， $\forall a \in [e, +\infty)$ ， $x \leq e^{ax+b} \Rightarrow \ln x \leq ax + b \Rightarrow b \geq \ln x - ax = f(x)$

$f'(x) = \frac{1-ex}{x}$ ，易知： $f(x)_{\max} = f\left(\frac{1}{e}\right) = -2$ ，故 $b \geq -2$ ；

综上, 实数 b 的取值范围为 $[-2, +\infty)$.

13. 已知点 P 在边长为 4 的等边三角形 ABC 内, 满足 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$, 且 $2\lambda + 3\mu = 1$,

延长 AP 交边 BC 于点 D , 若 $BD = 2DC$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的值为_____.

答案: $-\frac{9}{4}$

考点: 平面向量数量积

解析: A, P, D 共线, 不妨令 $\overrightarrow{AP} = 3m\overrightarrow{AD}$

$$\text{又 } \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{DC}, \text{ 故 } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = m\overrightarrow{AB} + 2m\overrightarrow{AC} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC},$$

$$\text{因此 } \begin{cases} \mu = 2\lambda \\ 2\lambda + 3\mu = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{8} \\ \mu = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC},$$

$$\text{则 } \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = \frac{7}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC},$$

$$\text{故 } \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = -\left(\frac{1}{8}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{7}{8}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) = -\frac{9}{4}.$$

14. 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = \frac{\pi}{3}$, D 是 BC 的中点. 若 $AD \leq \frac{\sqrt{2}}{2} BC$, 则 $\sin B \sin C$ 的最大值为_____.

答案: $\frac{3}{8}$

考点: 解三角形综合

$$\text{解析: } a^2 + bc = b^2 + c^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}a^2 \leq \frac{3}{2}a^2$$

$$\Rightarrow bc \leq \frac{1}{2}a^2 \Rightarrow \sin B \sin C \leq \frac{1}{2} \sin^2 A = \frac{3}{8}.$$

二、解答题 (本大题共 6 小题, 共计 90 分. 请在答题纸指定区域内作答, 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.)

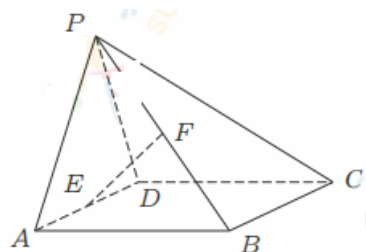
15. (本题满分 14 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $PA \perp PD$,

E, F 分别为 AD, PB 的中点. 求证:

(1) $EF \parallel$ 平面 PCD;

(2) 平面 PAB $\perp$ 平面 PCD.



证明: (1) 取 PC 中点 G, 连接 DG、FG.

在 $\triangle PBC$ 中, 因为 F, G 分别为 PB, PC 的中点, 所以 $GF \parallel BC$, $GF = \frac{1}{2}BC$.

因为底面 ABCD 为矩形, 且 E 为 AD 的中点,

所以 $DE \parallel BC$, $DE = \frac{1}{2}BC$,

所以 $GF \parallel DE$, $GF = DE$, 所以四边形 DEFG 为平行四边形,

所以 $EF \parallel DG$.

又因为 $EF \not\subset$ 平面 PCD, $DG \subset$ 平面 PCD,

所以 $EF \parallel$ 平面 PCD.

(2) 因为底面 ABCD 为矩形, 所以 $CD \perp AD$.

又因为平面 PAD $\perp$ 平面 ABCD, 平面 PAD $\cap$ 平面 ABCD = AD, $CD \subset$ 平面 ABCD,

所以 $CD \perp$ 平面 PAD.

因为 PA $\subset$ 平面 PAD, 所以 $CD \perp PA$.

又因为 $PA \perp PD$, $PD \subset$ 平面 PCD, $CD \subset$ 平面 PCD, $PD \cap CD = D$, 所以 $PA \perp$ 平面 PCD.

因为 PA $\subset$ 平面 PAB, 所以平面 PAB $\perp$ 平面 PCD.

16. (本题满分 14 分)

已知向量 $\vec{m} = (\cos x, \sin x)$, $\vec{n} = (\cos x, -\sin x)$, 函数 $f(x) = \vec{m} \cdot \vec{n} + \frac{1}{2}$.

(1) 若 $f(\frac{x}{2}) = 1$, $x \in (0, \pi)$, 求 $\tan(x + \frac{\pi}{4})$ 的值;

(2) 若 $f(\alpha) = -\frac{1}{10}$, $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$, $\sin \beta = \frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\beta \in (0, \frac{\pi}{2})$, 求 $2\alpha + \beta$ 的

值.

解: (1) 因为向量 $\mathbf{m}=(\cos x, \sin x)$, $\mathbf{n}=(\cos x, -\sin x)$,

$$\text{所以 } f(x)=\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}+\frac{1}{2}=\cos^2 x-\sin^2 x+\frac{1}{2}=\cos 2x+\frac{1}{2}.$$

$$\text{因为 } f\left(\frac{x}{2}\right)=1, \text{ 所以 } \cos x+\frac{1}{2}=1, \text{ 即 } \cos x=\frac{1}{2}.$$

$$\text{又因为 } x \in (0, \pi), \text{ 所以 } x=\frac{\pi}{3},$$

$$\text{所以 } \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=-2-\sqrt{3}.$$

$$(2) \text{若 } f(\alpha)=-\frac{1}{10}, \text{ 则 } \cos 2\alpha+\frac{1}{2}=-\frac{1}{10}, \text{ 即 } \cos 2\alpha=-\frac{3}{5}.$$

$$\text{因为 } \alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \text{ 所以 } 2\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \sin 2\alpha=-\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}=-\frac{4}{5}.$$

$$\text{因为 } \sin \beta=\frac{7\sqrt{2}}{10}, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } \cos \beta=\sqrt{1-\sin^2 \beta}=\frac{\sqrt{2}}{10},$$

$$\text{所以 } \cos (2\alpha+\beta)=\cos 2\alpha \cos \beta-\sin 2\alpha \sin \beta=\left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{\sqrt{2}}{10}-\left(-\frac{4}{5}\right) \times \frac{7\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{又因为 } 2\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right), \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \text{ 所以 } 2\alpha+\beta \in (\pi, 2\pi),$$

$$\text{所以 } 2\alpha+\beta \text{ 的值为 } \frac{7\pi}{4}.$$

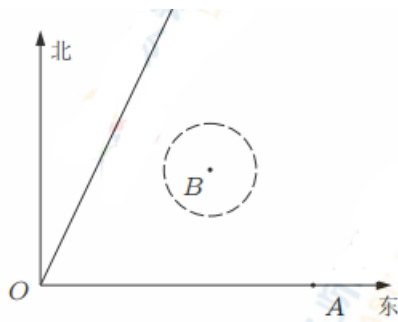
17. (本题满分 14 分)

如图, 港口 A 在港口 O 的正东 100 海里处, 在北偏东方向有条直线航道 OD, 航道和正东方向之间有一片以 B 为圆心, 半径为 $8\sqrt{5}$ 海里的圆形暗礁群 (在这片海域行船有触礁危险), 其中 $OB=20\sqrt{13}$ 海里, $\tan \angle AOB=\frac{2}{3}$, $\cos \angle AOD=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 现一艘科考船以 $10\sqrt{5}$

海里/小时的速度从 O 出发沿 OD 方向行驶, 经过 2 个小时后, 一艘快艇以 50 海里/小时的速度准备从港口 A 出发, 并沿直线方向行驶与科考船恰好相遇.

(1) 若快艇立即出发, 判断快艇是否有触礁的危险, 并说明理由;

(2) 在无触礁危险的情况下, 若快艇再等 x 小时出发, 求 x 的最小值.



解：如图，以 O 为原点，正东方向为 x 轴，正北方向为 y 轴，建立直角坐标系 xOy 。

因为 $OB=20\sqrt{13}$, $\tan\angle AOB=\frac{2}{3}$, $OA=100$,

所以点 $B(60, 40)$, 且 $A(100, 0)$ 。

(1) 设快艇立即出发经过 t 小时后两船相遇于点 C ,

则 $OC=10\sqrt{5}(t+2)$, $AC=50t$ 。

因为 $OA=100$, $\cos\angle AOD=\frac{\sqrt{5}}{5}$,

所以 $AC^2=OA^2+OC^2-2OA \cdot OC \cos\angle AOD$,

$$\text{即 } (50t)^2 = 100^2 + [10\sqrt{5}(t+2)]^2 - 2 \times 100 \times 10\sqrt{5}(t+2) \times \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

化得 $t^2=4$, 解得 $t_1=2$, $t_2=-2$ (舍去),

所以 $OC=40\sqrt{5}$ 。

因为 $\cos\angle AOD=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\sin\angle AOD=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 所以 $C(40, 80)$,

所以直线 AC 的方程为 $y=-\frac{4}{3}(x-100)$, 即 $4x+3y-400=0$ 。

因为圆心 B 到直线 AC 的距离 $d=\frac{|4 \times 60 + 3 \times 40 - 400|}{\sqrt{4^2+3^2}}=8$, 而圆 B 的半径 $r=8\sqrt{5}$,

所以 $d < r$, 此时直线 AC 与圆 B 相交, 所以快艇有触礁的危险。

答：若快艇立即出发有触礁的危险。

(2) 设快艇所走的直线 AE 与圆 B 相切, 且与科考船相遇于点 E 。

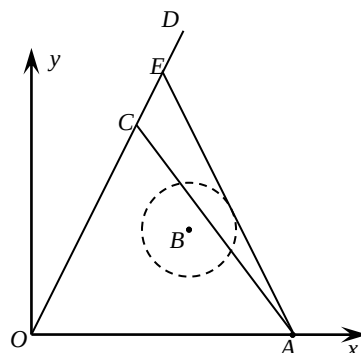
设直线 AE 的方程为 $y=k(x-100)$, 即 $kx-y-100k=0$ 。

因为直线 AE 与圆 B 相切, 所以圆心 B 到直线 AC 的距离 $d=\frac{|60k-40-100k|}{\sqrt{1^2+k^2}}=8\sqrt{5}$,

即 $2k^2+5k+2=0$, 解得 $k=-2$ 或 $k=-\frac{1}{2}$ 。

由 (1) 可知 $k=-\frac{1}{2}$ 舍去。

因为 $\cos\angle AOD=\frac{\sqrt{5}}{5}$, 所以 $\tan\angle AOD=2$, 所以直线 OD 的方程为 $y=2x$ 。



$$\text{由} \begin{cases} y=2x, \\ y=-2(x-100), \end{cases} \text{解得} \begin{cases} x=50, \\ y=100, \end{cases} \text{所以 } E(50, 100),$$

$$\text{所以 } AE=50\sqrt{5}, OE=50\sqrt{5},$$

$$\text{此时两船的时间差为 } \frac{50\sqrt{5}}{10\sqrt{5}} - \frac{50\sqrt{5}}{50} = 5 - \sqrt{5}, \text{ 所以 } x \geq 5 - \sqrt{5} - 2 = 3 - \sqrt{5}.$$

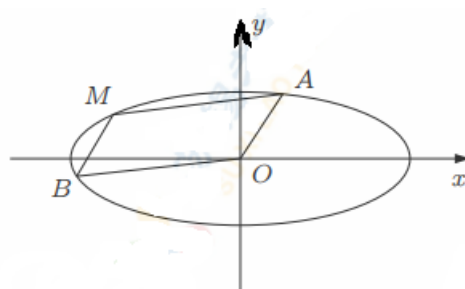
答: x 的最小值为 $(3 - \sqrt{5})$ 小时.

18. (本题满分 16 分)

如图, 在平面直角坐标系 xOy 中, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(-2, 0)$ 和 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$, 椭圆 C 上三点 A, M, B 与原点 O 构成一个平行四边形 $AMBO$.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$), 椭圆 C 上三点 A, M, B 与原点 O 构成一个平行四边形 $AMBO$.

- (1) 求椭圆 C 的方程;
- (2) 若点 B 是椭圆 C 左顶点, 求点 M 的坐标;
- (3) 若 A, M, B, O 四点共圆, 求直线 AB 的斜率.



解: (1) 因为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(-2, 0)$ 和 $(1, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

$$\text{所以 } a=2, \frac{1}{a^2} + \frac{3}{4b^2} = 1, \text{ 解得 } b^2=1,$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

(2) 因为 B 为左顶点, 所以 $B(-2, 0)$.

因为四边形 $AMBO$ 为平行四边形, 所以 $AM \parallel BO$, 且 $AM = BO = 2$.

设点 $M(x_0, y_0)$, 则 $A(x_0 + 2, y_0)$.

$$\text{因为点 } M, A \text{ 在椭圆 } C \text{ 上, 所以 } \begin{cases} \frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1, \\ \frac{(x_0+2)^2}{4} + y_0^2 = 1, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x_0 = -1, \\ y_0 = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

所以 $M(-1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2})$.

(3) 因为直线 AB 的斜率存在, 所以设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$.

$$\text{由 } \begin{cases} y=kx+m, \\ \frac{x^2}{4}+y^2=1, \end{cases} \text{ 消去 } y, \text{ 得 } (4k^2+1)x^2+8kmx+4m^2-4=0,$$

$$\text{则有 } x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2}, \quad x_1x_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}.$$

因为平行四边形 $AMBO$, 所以 $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=(x_1+x_2, y_1+y_2)$.

$$\text{因为 } x_1+x_2=\frac{-8km}{1+4k^2}, \text{ 所以 } y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2m=k \cdot \frac{-8km}{1+4k^2}+2m=\frac{2m}{1+4k^2},$$

$$\text{所以 } M(\frac{-8km}{1+4k^2}, \frac{2m}{1+4k^2}).$$

因为点 M 在椭圆 C 上, 所以将点 M 的坐标代入椭圆 C 的方程,

$$\text{化得 } 4m^2=4k^2+1. \quad ①$$

因为 A, M, B, O 四点共圆, 所以平行四边形 $AMBO$ 是矩形, 且 $OA \perp OB$,

$$\text{所以 } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=0.$$

$$\text{因为 } y_1y_2=(kx_1+m)(kx_2+m)=k^2x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2=\frac{m^2-4k^2}{1+4k^2},$$

$$\text{所以 } x_1x_2+y_1y_2=\frac{4m^2-4}{1+4k^2}+\frac{m^2-4k^2}{1+4k^2}=0, \text{ 化得 } 5m^2=4k^2+4. \quad ②$$

$$\text{由 } ①② \text{ 解得 } k^2=\frac{11}{4}, \quad m^2=3, \text{ 此时 } \Delta > 0, \text{ 因此 } k=\pm \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

$$\text{所以所求直线 } AB \text{ 的斜率为 } \pm \frac{\sqrt{11}}{2}.$$

19. (本题满分 16 分)

已知函数 $f(x)=\frac{e^x}{x^2-ax+a}$ ($a \in \mathbb{R}$), 其中 e 为自然对数的底数.

(1) 若 $a=1$, 求函数 $f(x)$ 的单调减区间;

(2) 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbb{R}$, 且 $f(2) > f(a)$, 求 a 的取值范围;

(3) 证明: 对任意 $a \in (2, 4)$, 曲线 $y=f(x)$ 上有且仅有三个不同的点, 在这三点处的切线经过坐标原点.

$$\text{解: (1) 当 } a=1 \text{ 时, } f(x)=\frac{e^x}{x^2-x+1},$$

$$\text{所以函数 } f(x) \text{ 的定义域为 } \mathbb{R}, \quad f'(x)=\frac{e^x(x-1)(x-2)}{(x^2-x+1)^2}.$$

令 $f'(x) < 0$, 解得 $1 < x < 2$,

所以函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(1, 2)$.

(2) 由函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 得 $x^2 - ax + a \neq 0$ 恒成立,

所以 $a^2 - 4a < 0$, 解得 $0 < a < 4$.

方法 1

$$\text{由 } f(x) = \frac{e^x}{x^2 - ax + a}, \text{ 得 } f'(x) = \frac{e^x(x-a)(x-2)}{(x^2 - ax + a)^2}.$$

① 当 $a = 2$ 时, $f(2) = f(a)$, 不符题意.

② 当 $0 < a < 2$ 时,

因为当 $a < x < 2$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(a, 2)$ 上单调递减,

所以 $f(a) > f(2)$, 不符题意.

③ 当 $2 < a < 4$ 时,

因为当 $2 < x < a$ 时, $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(2, a)$ 上单调递减,

所以 $f(a) < f(2)$, 满足题意.

综上, a 的取值范围为 $(2, 4)$.

方法 2

$$\text{由 } f(2) > f(a), \text{ 得 } \frac{e^2}{4-a} > \frac{e^a}{a}.$$

因为 $0 < a < 4$, 所以不等式可化为 $e^2 > \frac{e^a}{a}(4-a)$.

$$\text{设函数 } g(x) = \frac{e^x}{x}(4-x) - e^2, \quad 0 < x < 4.$$

因为 $g'(x) = e^x \frac{-(x-2)^2}{x^2} \leq 0$ 恒成立, 所以 $g(x)$ 在 $(0, 4)$ 上单调递减.

又因为 $g(2) = 0$, 所以 $g(x) < 0$ 的解集为 $(2, 4)$.

所以, a 的取值范围为 $(2, 4)$.

(3) 证明: 设切点为 $(x_0, f(x_0))$, 则 $f'(x_0) = \frac{e^{x_0}(x_0-2)(x_0-a)}{(x_0^2 - ax_0 + a)^2}$,

$$\text{所以切线方程为 } y - \frac{e^{x_0}}{x_0^2 - ax_0 + a} = \frac{e^{x_0}(x_0-2)(x_0-a)}{(x_0^2 - ax_0 + a)^2} \times (x - x_0).$$

$$\text{由 } 0 - \frac{e^{x_0}}{x_0^2 - ax_0 + a} = \frac{e^{x_0}(x_0-2)(x_0-a)}{(x_0^2 - ax_0 + a)^2} \times (0 - x_0),$$

$$\text{化简得 } x_0^3 - (a+3)x_0^2 + 3ax_0 - a = 0.$$

$$\text{设 } h(x) = x^3 - (a+3)x^2 + 3ax - a, \quad a \in (2, 4),$$

则只要证明函数 $h(x)$ 有且仅有三个不同的零点.

由(2)可知 $a \in (2, 4)$ 时, 函数 $h(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, $h'(x) = 3x^2 - 2(a+3)x + 3a$.

因为 $\Delta = 4(a+3)^2 - 36a = 4(a - \frac{3}{2})^2 + 27 > 0$ 恒成立,

所以 $h'(x) = 0$ 有两不相等的实数根 x_1 和 x_2 , 不妨 $x_1 < x_2$.

因为

x	$(-\infty, x_1)$	x_1	(x_1, x_2)	x_2	$(x_2, +\infty)$
$h'(x)$	+	0	-	0	+
$h(x)$	增	极大	减	极小	增

所以函数 $h(x)$ 最多有三个零点.

因为 $a \in (2, 4)$, 所以 $h(0) = -a < 0$, $h(1) = a - 2 > 0$, $h(2) = a - 4 < 0$, $h(5) = 50 - 11a > 0$,

所以 $h(0)h(1) < 0$, $h(1)h(2) < 0$, $h(2)h(5) < 0$.

因为函数的图象不间断, 所以函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 5)$ 上分别至少有一个零点.

综上所述, 函数 $h(x)$ 有且仅有三个零点.

20. (本题满分 16 分)

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $n \geq 2$ 时, $a_n \neq 0$, 则称数列 $\left\{\frac{a_n}{a_{n+1}}\right\} (n \in \mathbf{N}^*)$ 为 $\{a_n\}$ 的“L 数列”.

(1) 若 $a_1 = 1$, 且 $\{a_n\}$ 的“L 数列”为 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $a_n = n + k - 3 (k > 0)$, 且 $\{a_n\}$ 的“L 数列”为递增数列, 求 k 的取值范围;

(3) 若 $a_n = 1 + p^{n-1}$, 其中 $p > 1$, 记 $\{a_n\}$ 的“L 数列”的前 n 项和为 S_n , 试判断是否存在等差数列 $\{c_n\}$, 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, 都有 $c_n < S_n < c_{n+1}$ 成立, 并证明你的结论.

解: (1) 由题意知, $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{2^n}$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2^n$,

$$\text{所以 } a_n = \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdots \frac{a_2}{a_1} \cdot a_1 = 2^{n-1} \cdot 2^{n-2} \cdots 2^1 \cdot 1 = 2^{1+2+3+\cdots+(n-1)} = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

即数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$

(2) 因为 $a_n = n + k - 3 (k > 0)$, 且 $n \geq 2$, $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_n \neq 0$, 所以 $k \neq 1$.

方法 1

设 $b_n = \frac{a_n}{a_{n+1}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 所以 $b_n = \frac{n+k-3}{(n+1)+k-3} = 1 - \frac{1}{n+k-2}$.

因为 $\{b_n\}$ 为递增数列, 所以 $b_{n+1} - b_n > 0$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立,

即 $\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1} > 0$ 对 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立.

因为 $\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1} = \frac{1}{(n+k-2)(n+k-1)}$,

所以 $\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1} > 0$ 等价于 $(n+k-2)(n+k-1) > 0$.

当 $0 < k < 1$ 时, 因为 $n=1$ 时, $(n+k-2)(n+k-1) < 0$, 不符合题意.

当 $k > 1$ 时, $n+k-1 > n+k-2 > 0$, 所以 $(n+k-2)(n+k-1) > 0$,

综上, k 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

方法 2

令 $f(x) = 1 - \frac{1}{x+k-2}$, 所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 2-k)$ 和区间 $(2-k, +\infty)$ 上单调递增.

当 $0 < k < 1$ 时,

$f(1) = 1 - \frac{1}{k-1} > 1$, $f(2) = 1 - \frac{1}{k} < 1$, 所以 $b_2 < b_1$, 不符合题意.

当 $k > 1$ 时,

因为 $2-k < 1$, 所以 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增, 所以 $\{b_n\}$ 单调递增, 符合题意.

综上, k 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

(3) 存在满足条件的等差数列 $\{c_n\}$, 证明如下:

因为 $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{1+p^{k-1}}{1+p^k} = \frac{1}{p} + \frac{1-\frac{1}{p}}{1+p^k}$, $k \in \mathbf{N}^*$,

所以 $S_n = \frac{n}{p} + (1-\frac{1}{p})(\frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+p^2} + \cdots + \frac{1}{1+p^{n-1}} + \frac{1}{1+p^n})$,

又因为 $p > 1$, 所以 $1 - \frac{1}{p} > 0$,

所以 $\frac{n}{p} < S_n < \frac{n}{p} + (1-\frac{1}{p})(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \cdots + \frac{1}{p^{n-1}} + \frac{1}{p^n})$,

$$\text{即 } \frac{n}{p} < S_n < \frac{n}{p} + \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right),$$

$$\text{因为 } \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p^n}\right) < \frac{1}{p}, \text{ 所以 } \frac{n}{p} < S_n < \frac{n+1}{p},$$

$$\text{设 } c_n = \frac{n}{p}, \text{ 则 } c_{n+1} - c_n = \frac{n+1}{p} - \frac{n}{p} = \frac{1}{p}, \text{ 且 } c_n < S_n < c_{n+1},$$

所以存在等差数列 $\{c_n\}$ 满足题意.