江苏省仪征中学 2020-2021 学年度第一学期

高三数学周练（10）

2020.12.05

（考试时间：120 分钟　满分：150 分）

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号等用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔填写在答题卡和试卷的指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，用 0.5 毫米黑色墨水的签字笔将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

D 1. 已知 $U=\mathbf{R}$，$A=\{x\,|\,|x|<2\}$，$B=\{x\,|-1<x<4\}$，则 $(\complement_U A)\cap B=$

A. $(-1,2)$　　B. $(-\infty,-2]$　　C. $(2,4)$　　D. $[2,4)$

B 2. 已知复数 z 的共轭复数为 $\overline{z}$，若 $z=a-\sqrt{2}\mathrm{i}\,(a>0)$，且 $z\cdot\overline{z}=4$，则 $a=$

A. 1　　B. $\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{6}$

C 3. 已知 $a=2^{\frac{1}{3}}$，$b=\log_2\frac{1}{3}$，$c=a^b$，则 a,b,c 的大小关系是

>1　　<0　　$(0,1)$

A. $c>a>b$　　B. $c>b>a$　　C. $a>c>b$　　D. $a>b>c$

D 4. 命题"$\forall x\in[1,2]$，$x^2-2a\leqslant 0$"为真命题的一个充分不必要条件是　$2a\geqslant(x^2)_{max}=4$

A. $a\leqslant 2$　　B. $a\geqslant 2$　　C. $a\leqslant 4$　　D. $a\geqslant 4$

$a\geqslant 2$

C 5. 有 5 名学生志愿者到 2 个小区参加疫情防控常态化宣传活动，每名学生只去 1 个小区，每个小区至少安排 1 名学生，则不同的安排方法为

A. 10 种　　B. 20 种　　C. 30 种　　D. 40 种

2^5-2
$=30$

B 6. 函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{\log_{\frac{1}{2}}|2^{x}-2^{-x}|}$ 的部分图象可能是　　奇

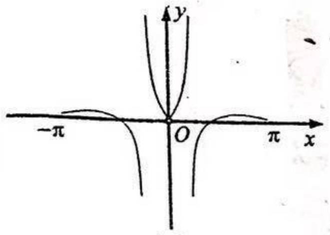
$x\to 0^{+}$ 时. $y\to$ 正? 负?

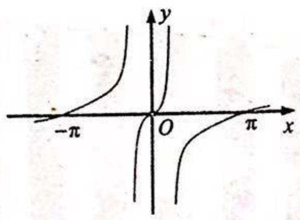
$x=\frac{1}{4}$　$\log_{\frac{1}{2}}|2^{\frac{1}{4}}-2^{-\frac{1}{4}}|$

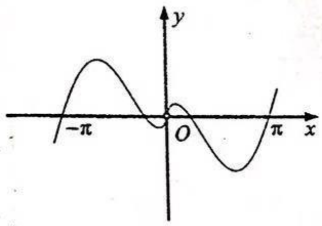
$=-\log_{2}|\sqrt[4]{2}-$

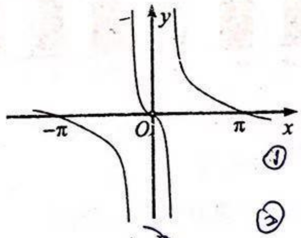
$=-\log_{2}$

$=-\log_{2}($


A


B


C


D

① $x\to 0^{+}$, $y\to$ 正 去D

B 7. 若双曲线 $C_1:\dfrac{y^2}{3}-\dfrac{x^2}{a}=1$ 与双曲线 $C_2:\dfrac{x^2}{6}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 的渐近线相同，则双曲线 C_1 的离心率为

$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$　　$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{a}}x$　　$a=2$　$\frac{y^2}{3}-\frac{x^2}{2}=1$　$c=\sqrt{5}$　$a=\sqrt{}$

A. $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$　　B. $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　D. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

C 8. 2013 年 9 月 7 日，习近平总书记在哈萨克斯坦纳扎尔巴耶夫大学发表演讲并回答学生们提出的问题，在谈到环境保护问题时他指出：“我们既要绿水青山，也要金山银山。宁要绿水青山，不要金山银山，而且绿水青山就是金山银山。”“绿水青山就是金山银山”这一科学论断，成为树立生态文明观、引领中国走向绿色发展之路的理论之基。某市为了改善当地生态环境，2014 年投入资金 160 万元，以后每年投入资金比上一年增加 20 万元，从 2020 年开始每年投入资金比上一年增加 10%，到 2024 年底该市生态环境建设投资总额大约为

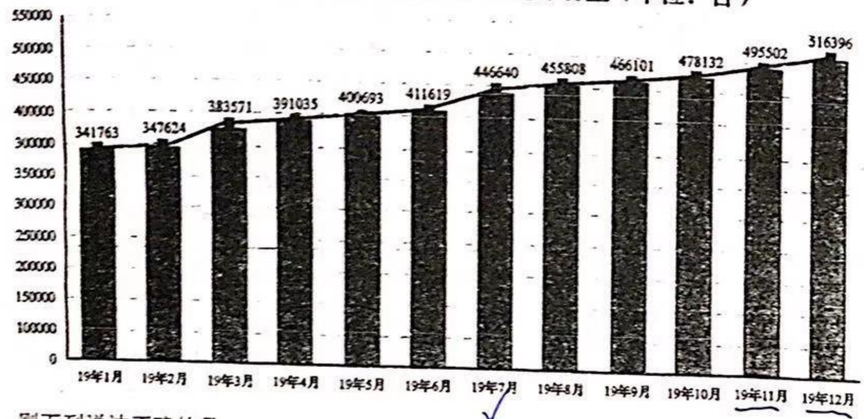
14　15　16　17　18　19　20　21　22　23
160　180　200　220　240　260　280　$280\cdot1.1$　$280\cdot1.1^2$　$280\cdot1.1^3$
260　260×1.1

A. 2655 万元　　B. 2970 万元　　C. 3005 万元　　D. 3040 万元　　$1540+280$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 3 分。

B9. 2019 年 1 月到 2019 年 12 月某地新能源汽车配套公共充电桩保有量如下：

2019年各月公共类充电设施保有量（单位：台）



则下列说法正确的是

A．2019 年各月公共充电桩保有量一直保持增长态势

B．2019 年 12 月较 2019 年 11 月公共充电桩保有量增加超过 2 万台

C．2019 年 6 月到 2019 年 7 月，公共充电桩保有量增幅最大 × 高度大最大

D．2019 年下半年各月公共充电桩保有量均突破 45 万台 × 七月不满足

AC10．设 $a,b\in\mathbf{R}$，则下列结论正确的是

A．若 $a>b>0$，则 $\frac{1}{a^2}<\frac{1}{b^2}$　　$\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}=\frac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2}<0$

B．若 $a<b<0$，则 $(a-1)^2<(b-1)^2$　　$>$ ×

C．若 $a+b=2$，则 $2^a+2^b\geqslant 4$　　$\geqslant 2\sqrt{2^{a+b}}=2\sqrt{2^2}=4$

D．若 $2^a+\frac{1}{b}>2^b+\frac{1}{a}$，则 $a>b$　　$2^a-\frac{1}{a}>2^b-\frac{1}{b}\Rightarrow a>b$　　$y=2^x-\frac{1}{x}$

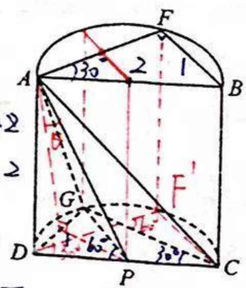
ABD11．如图，在半圆柱中，AB 为上底面直径，DC 为下底面直径，AD,BC 为母线，$AB=AD=2$，点 F 在 $\overset{\frown}{AB}$ 上，点 G 在 $\overset{\frown}{DC}$ 上，$BF=DG=1$，P 为 DC 的中点．则

A．$BF\parallel PG$

B．异面直线 AF 与 CG 所成角为 $60°$　　BF′与CG

C．三棱锥 $P-ACG$ 的体积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$V_{A-PCG}=\frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2})\cdot 2=\frac{\sqrt{3}}{6}$

D．直线 AP 与平面 ADG 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{10}$　　$\sin\theta=\frac{PP'}{AP}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{15}}{10}$



（第 11 题）

ACD 12. 已知函数 $f(x)=\sqrt{3}-2\sin x+\sin 2x$，则下列结论正确的是

A. 函数 $f(x)$ 是周期函数　　　　B. 函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有 4 个零点

C. 函数 $f(x)$ 的图象关于 $(\pi,\sqrt{3})$ 对称　　　　D. 函数 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

$f(2\pi+x)+f(2\pi-x)=2\sqrt{3}$

$f(2\pi-x)+f(x)=2\sqrt{3}$

$f'(x)=-2\cos x+2\cos 2x$

$=4\cos^2 x-2\cos x-2$

$=2(2\cos^2 x-\cos x-1)$

$=2(2\cos x+1)(\cos x-1)$

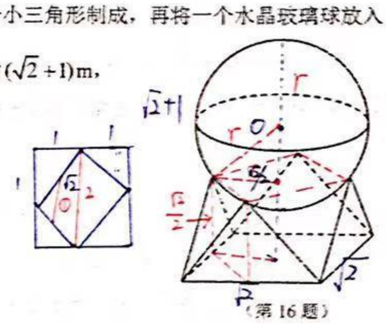
三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。

13. 已知向量 $a=(-1,t)$，$b=(3,1)$，且 $(2a-b)\perp b$，则 $t=$ ___8___.

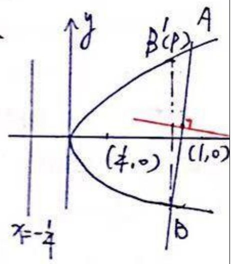
14. 设函数 $f(x)=\begin{cases}1-x^2, & x\leq 2,\\ \frac{1}{2}f(x-2), & x>2,\end{cases}$ 则 $f(f(6))=$ ___$\frac{7}{16}$___.

15. 已知抛物线 $C:y^2=x$，斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的直线 l 经过点 $(1,0)$，且与 C 交于 A,B 两点（其中 A 点在 x 轴上方）．若 B 点关于 x 轴的对称点为 P，则 $\triangle APB$ 外接圆的方程为 ___$(x-\frac{13}{6})^2+y^2=\frac{133}{36}$___.

16. 某公司周年庆典活动中，制作的“水晶球”工艺品如图所示，底座是用一边长为 2 m 的正方形钢板，按各边中点连线垂直折起四个小三角形制成，再将一个水晶玻璃球放入其中．若水晶球最高点到底座底面的距离为 $(\sqrt{2}+1)$m，则水晶球的表面积为 ___4π___ m^2.



（第 16 题）



$r+\sqrt{r^2-(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}$

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（本小题满分 10 分）

在① $\sqrt{3}c\sin A=a\cos C$，② $\tan(C+\frac{\pi}{4})=2+\sqrt{3}$，③ $a^2+b^2=c^2+\sqrt{3}ab$ 这三个条件中任选一个，补充在下面问题中，并加以解答．

已知 $\triangle ABC$ 中的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，面积为 S．若 $c=4$，$B=105^\circ$，___①___，求 a 和 S．

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分．

解：$\because \sqrt{3}c\sin A=a\cos C$

$\therefore \sqrt{3}\sin C\sin A=\sin A\cos C$

又 $\sin A\neq 0$

$\therefore \tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$ —3′

又 $0<C<\pi$

$\therefore C=30^\circ$ —5′

故 $A=45^\circ$ —6′

$\frac{a}{\sin 45^\circ}=\frac{4}{\sin 30^\circ}\Rightarrow a=$

$S=\frac{1}{2}bc\sin 45^\circ=$

18．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+\cos x$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的最大值，并写出当 $f(x)$ 取最大值时 x 的取值集合；

(2) 若 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$，求 $f(2\alpha)$ 的值.

(1) $f(x)=\sin x\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{3}{2}\cos x$

$=\sqrt{3}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$ —4′

$f_{max}=\sqrt{3}$ 此时 $x\in\{x\mid x=\dfrac{\pi}{6}+2k\pi, k\in Z\}$ —6′

(2) $\sqrt{3}\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

$\sqrt{3}\cos\alpha=\dfrac{3\sqrt{3}}{5}$

$\cos\alpha=\dfrac{3}{5}$ —8′

又 $\alpha\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

$\therefore \sin\alpha=\dfrac{4}{5}\Rightarrow\sin2\alpha=\dfrac{24}{25}$，$\cos2\alpha=-\dfrac{7}{25}$ —10′

$f(2\alpha)=\sqrt{3}\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$

$=\sqrt{3}\left[\dfrac{24}{25}\times\dfrac{1}{2}+\left(-\dfrac{7}{25}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right]$

$=\dfrac{24\sqrt{3}-21}{50}$ —12′

19．（本小题满分 12 分）

近年来，我国肥胖人群的规模不断扩大，肥胖人群有很大的心血管安全隐患．目前，国际上常用身体质量指数（Body Mass Index，缩写 BMI）来衡量人体胖瘦程度以及是否健康，其计算公式是 $\text{BMI}=\dfrac{\text{体重（单位：kg）}}{\text{身高}^2\text{（单位：m}^2\text{）}}$．中国成人的 BMI 数值标准为：

BMI<18.5 为偏瘦；18.5≤BMI<24 为正常；24≤BMI<28 为偏胖；BMI≥28 为肥胖．

某单位随机调查了 100 名员工，测量身高、体重并计算出 BMI 值．

（1）根据调查结果制作了如下 2×2 列联表，请将 2×2 列联表补充完整，并判断是否有 99%的把握认为肥胖与不经常运动有关；

	肥胖	不肥胖	合计
经常运动员工	20 $\frac{1}{5}$	40 $\frac{2}{5}$	60
不经常运动员工	24 $\frac{6}{25}$	16 $\frac{4}{25}$	40
合计	44	56	100

表 2′

（2）若把上表中的频率作为概率，现随机抽取 3 人进行座谈，记抽取的 3 人中"经常运动且不肥胖"的人数为 X，求随机变量 X 的分布列和数学期望．

附：$K^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$．

$P(K^2\geqslant K_0)$	0.10	0.05	0.01	0.005
K_0	2.706	3.811	6.635	7.879

(1) $\because K^2=\dfrac{100\times(20\times16-40\times24)^2}{44\times56\times60\times40}=\dfrac{1600}{231}\approx 6.926>6.635$ —5′

$\therefore$ 有99%…认为 —6′

(2) 经常运动且不肥胖的概率为 $\dfrac{2}{5}$ —8′

$X=0,1,2,3$

$P(X=0)=\left(\dfrac{3}{5}\right)^3=\dfrac{27}{125}$

$P(X=1)=C_3^1\left(\dfrac{3}{5}\right)^2\left(\dfrac{2}{5}\right)=\dfrac{54}{125}$

$P(X=2)=C_3^2\left(\dfrac{3}{5}\right)\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{36}{125}$

$P(X=3)=\left(\dfrac{2}{5}\right)^3=\dfrac{8}{125}$ —10′

$E(X)=\dfrac{6}{5}$ —12′

20．（

如

21．（

已

共

22．（

已

21(3) $OD^2+OM^2=x_D^2+y_D^2+x_M^2+y_M^2$ (*)　$x_D+x_M=1$，$x_Dx_M=-\frac{1}{2}$

$=(x_D+x_M)^2-2x_Dx_M$　$y_D+y_M=k_1(x_D+x_M)\Rightarrow k_1=\frac{1}{2}$

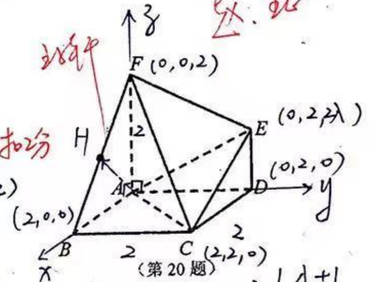
$+(y_D+y_M)^2-2y_Dy_M$　$y_Dy_M=-\frac{1}{8}$

20.（本小题满分 12 分） 由(2)特k=±代入(*)=1+3+¼+¼=5为定值

如图，已知多面体 $ABCDEF$ 的底面 $ABCD$ 是边长为 2 的正方形，$FA\perp$ 底面 $ABCD$，$AF=2$，且 $\overrightarrow{DE}=\lambda\overrightarrow{AF}$ $(0<\lambda<1)$．

（1）求证：CE // 平面 ABF；

（2）若二面角 $B-CF-E$ 的大小为 $\frac{5\pi}{6}$，求 λ 的值．



（第 20 题）

(1) 证面EDC // 面ABF即可 $-6'$ 少线面扣分

(2) 面BCF一个法向量为 $\vec{n_1}=\overrightarrow{AH}=(1,0,1)$（先证）

设面EFC一个法向量为 $\vec{n_2}=(x,y,z)$ $-8'$

$\overrightarrow{CF}=(-2,-2,2)$　$\overrightarrow{CE}=(-2,0,2\lambda)$

$\because\begin{cases}\overrightarrow{CF}\cdot\vec{n_2}=0\\ \overrightarrow{CE}\cdot\vec{n_2}=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}-2x-2y+2z=0\\ -2x+2\lambda z=0\end{cases}$ 取 $\begin{cases}x=\lambda\\ y=1-\lambda\\ z=1\end{cases}$ $-10'$

$\therefore|\cos\langle\vec{n_1},\vec{n_2}\rangle|=|\cos\frac{5\pi}{6}|$

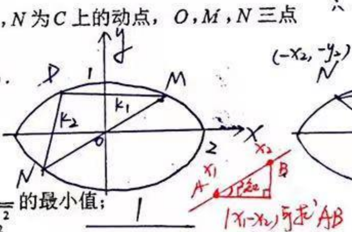
$\therefore\left|\frac{\lambda+1}{\sqrt{2}\sqrt{\lambda^2+(1-\lambda)^2+1}}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}$ $(0<\lambda<1)$

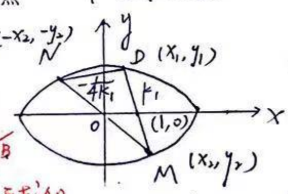
$\therefore 2\lambda^2-5\lambda+2=0$ $-12'$

$\therefore\lambda=\frac{1}{2}$ 或 2（舍）

21.（本小题满分 12 分）

已知 O 为坐标原点，椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+y^2=1$，点 D，M，N 为 C 上的动点，O，M，N 三点共线，直线 DM，DN 的斜率分别为 k_1，k_2 $(k_1k_2\neq0)$．





（1）证明：$k_1k_2=-\frac{1}{4}$；　$-2'$

（2）当直线 DM 过点 $(1,0)$ 时，求 $\frac{1}{|DN|}+\frac{19}{2\sqrt{1+k_2^2}}$ 的最小值；

（3）若 $k_1+k_2=0$，证明：$|OD|^2+|OM|^2$ 为定值．

(2) $DM:y=k_1(x-1)$，$x^2+4y^2=4$ $\Rightarrow(1+4k_1^2)x^2-8k_1^2x+4k_1^2-4=0$

$\therefore\begin{cases}x_1+x_2=\frac{8k_1^2}{1+4k_1^2}\\ x_1x_2=\frac{4k_1^2-4}{1+4k_1^2}\end{cases}$

$DN=\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2}$

$=\sqrt{1+k_2^2}\,|x_2+x_1|$

$=\sqrt{1+\frac{1}{16k_1^2}}\left|\frac{8k_1^2}{1+4k_1^2}\right|$ $-4'$

原式 $=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{16k_1^2}}\cdot\frac{8k_1^2}{1+4k_1^2}}+\frac{19}{2\sqrt{1+\frac{1}{16k_1^2}}}$

$=\frac{1}{2\sqrt{1+k_2^2}\cdot\frac{8}{k_2^2+4}}+\frac{19}{2\sqrt{1+k_2^2}}$

$=\frac{4k_2^2+1+19}{2\sqrt{1+k_2^2}}$ $-7'$

令 $\sqrt{1+k_2^2}=t$ 上式 $=\frac{4t^2+16}{2t}=2t+\frac{8}{t}\geq2\sqrt{\cdots}=8$

当且仅当 $t=2$ 时 $k_2=\pm\sqrt{3}$ 原式$_{min}=8$

(3) $\because\begin{cases}k_1+k_2=0\\ k_1k_2=-\frac{1}{4}\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}k_1=\frac{1}{2}\\ k_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$ 或 $\begin{cases}k_1=-\frac{1}{2}\\ k_2=\frac{1}{2}\end{cases}$

不妨令 $k_1=\frac{1}{2}$，$k_2=-\frac{1}{2}$ $-8'$

目 $=x_1^2+y_1^2+x_2^2+y_2^2$

$=2+\frac{3}{4}(x_1^2+x_2^2)$

$DN:y-y_1=\frac{1}{2}(x-x_1)$，$x^2+4y^2=4$

$\Rightarrow 2x^2+4(y_1-\frac{1}{2}x_1)x+4(y_1-\frac{1}{2}x_1)^2-4=0$

$\therefore x_1x_N=\frac{4(y_1-\frac{1}{2}x_1)^2-4}{2}=-2x_1y_1$

$\therefore x_N=-2y_1$

$\boxed{x_N=x_1(-\frac{1}{2})}$ $-10'$

目 $=2+\frac{3}{4}(x_1^2+4y_1^2)$

又 $\frac{x_1^2}{4}+y_1^2=1$ $\therefore x_1^2+4y_1^2=4$

$\therefore$ 目 $=2+\frac{3}{4}\times4=5$ 为定值 $-12'$

22.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=a\ln(x+1)$，$g(x)=xe^x$（$x>-1$）．

（1）当 $a=1$ 时，证明：$f(x)\leqslant x\leqslant g(x)$；

（2）设函数 $F(x)=f(x)-g(x)$，若 $F(x)$ 有极值，且极值为正数，求实数 a 的取值范围．

(1) $a=1$ 时，$f(x)=\ln(x+1)$

令 $F_1(x)=x-\ln(x+1)$

$F_1'(x)=1-\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$ $(x>-1)$

令 $F_1'(x)>0$ 得 $x>0$ $\therefore F_1(x)\uparrow$

令 $F_1'(x)<0$ 得 $x\in(-1,0)$ $F_1(x)\downarrow$

$\therefore F_{1min}=F_1(0)=0-0=0$ $-2'$

$\therefore F_1(x)\geq0$ $\therefore x\geq\ln(x+1)$

令 $H(x)=g(x)-x=xe^x-x$

$H'(x)=(x+1)e^x-1$

$H''(x)=e^x(x+2)$

$\because x>-1$ $\therefore e^x(x+2)>0$

$\therefore H'(x)$ 在 $(-1,+\infty)\uparrow$

又 $H'(0)=0$

$\therefore H$ 在 $(-1,0)\downarrow(0,+\infty)\uparrow$

$\therefore H_{min}=H(0)=0$

$\therefore H(x)\geq0$ $\therefore g(x)\geq x$ $-4'$

(2) $F(x)=-xe^x+a\ln(x+1)$ $(x>-1)$

$F'(x)=\frac{a}{x+1}-(x+1)e^x$ $(x>-1)$

① $a\leq0$ 时，$F'(x)<0$，F 在 $(-1,+\infty)$ 上无极值 $-5'$

② $a>0$ 时，记 $F'(x)=\varphi(x)$，$\varphi'(x)=\frac{-a}{(x+1)^2}-(x+2)e^x<0$

$\therefore\varphi(x)$ 在 $(-1,+\infty)\downarrow$

又 $\varphi(0)=F'(0)=a-1$，$\varphi(a-1)=F'(a-1)=1-ae^{a-1}$

ⅰ $0<a<1$ 时 $F'(0)<0$，$F'(a-1)>0$

$\therefore$ 在 $(-1,+\infty)$ 上存在唯一 $x_0\in(a-1,0)$ $-10'$

使 $F'(x_0)=0$ 故 $F(x)$ 在 $(-1,x_0)\uparrow$ 在 $(x_0,+\infty)\downarrow$

$\therefore F(x)$ 的极大值 $F(x_0)>F(0)=0$ 符

ⅱ $a>1$ 时，$F'(0)>0$，$F'(a-1)<0$

ⅲ $a=1$ 时 $F(x)\leq0$ 不合舍

综上 $a>0$ 且 $a\neq1$ $-12'$