如图 9,取 $OD=\frac{1}{2}$,即 $D\left(\frac{1}{4},\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$,则 $\frac{|OD|}{|OC|}=\frac{|OC|}{|OB|}=\frac{1}{2}$,且 $\angle BOC=\angle COD$,有 $\triangle BOC \backsim \triangle COD$,即 $|CD|=\frac{1}{2}|BC|$,于是,只要求 $|CA|+|CD|$ 的取值范围.

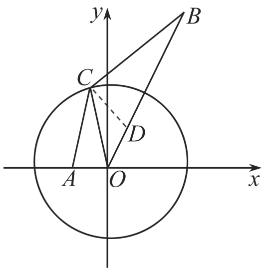

图 9

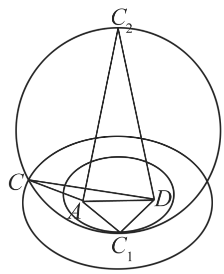

图 10

能求得图 9 中的 $|AD|=\frac{\sqrt{3}}{2}$,把 AD 画成水平形态(图 10),设 $|CA|+|CD|=2a$,表示以 A、D 为焦点长轴长是 $2a$ 的椭圆,当 C 位于最下方时,质点 C 的重力势能最小,而 C 又在圆上,于是,C 点位于图 10 中的 C_1 的位置时,重力势能最小,C 点处于稳定状态,从图 10 中看到此时的长轴 $2a$ 最小,$|AD|=\frac{\sqrt{3}}{2}$,解得 $2a$ 的最小值是 $\sqrt{3}$.

当 C 点位于图 10 中的 C_2 的位置时,质点 C 重力势能最大,椭圆的长轴长最长,$2a$ 的最大值是 $\sqrt{7}$.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:80.

[2] 吴振奎.数学解题中的物理方法[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011,7:92-94.

[3] 王志和.高中课堂中的文化数学[M].银川:黄河出版传媒集团阳光出版社,2020:301.

[4] 张莘钿,胡典顺.一类“线段和”问题解决策略探究[J].数学通讯(下半月),2019(12):29.

[5] 黄建峰.一类向量问题的解法探究和命制溯源[J].数学通讯(下半月),2020(07):21.

作者简介 孙贤欢(1982—),男,上海市奉贤人,中学高级教师,德育副校长;研究方向:数学教学、学科德育.

例析对称思想在数学解题中的妙用

广东省惠州市第一中学 516007 **方志平**

【摘 要】 对称是一种平衡、一种和谐、一种美感,是自然界和人类社会中普遍存在的形式之一.这也成为我们发现、研究和解决问题的一种重要的方法.本文将举例阐述:利用中心对称、轴对称、平面对称、图形的对称特征、代数式的对称、对称原理解决问题,充分彰显了对称不仅是一个数学概念,更是一种思想方法.

【关键词】 对称;数学;解题

对称在自然界中是普遍存在的,而数学来源于生活,不少数学问题中涉及的对象都具有对称性,对称给人们以和谐、平衡的美感.对称不仅是一个数学概念,更是一种思想方法,对称思想是研究数学问题常用的思想方法,在数学教学中,充分挖掘问题中的对称性,利用对称思想去分析问题和解决问题,通常能回避繁杂的运算,提高解题速度和准确率.本文将举例阐述,供读者参考.

1 利用中心对称解题

例 1 已知函数 $f(x)(x\in\mathbf{R})$ 满足 $f(-x)=2-f(x)$,若函数 $y=\frac{x+1}{x}$ 与 $y=f(x)$ 图象的交点为 $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_m,y_m)$,则 $\sum_{i=1}^{m}(x_1+y_1)=($ $)$.

A.0 B.m C.$2m$ D.$4m$

解 由 $f(-x)=2-f(x)$ 得 $f(-x)+f(x)=2$,所以 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称;而 $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$ 的图象也关于点 $(0,1)$ 对称,于是 $f(x)$ 与 $y=\frac{x+1}{x}$ 的交点关于点 $(0,1)$ 对称,并且是成对出现的,所以 $\sum_{i=1}^{m}(x_i+y_i)=\sum_{i=1}^{m}x_i+\sum_{i=1}^{m}y_i=0+\frac{m}{2}\times 2=m$.故选 B.

评注　巧用对称思想解题，不仅彰显了数学的美的形式，还是一种重要的数学思想，更是一种分析并解答问题的有效方法. 在解这类问题时，我们要认真分析已知条件或图形中隐藏的对称关系，然后借助对称思想来巧妙地解答问题.

例 2　（2020 年高考全国 Ⅰ 卷）若定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，且 $f(2)=0$，则满足 $xf(x-1)\geqslant 0$ 的 x 的取值范围是(　　).

A. $[-1,1]\cup[3,+\infty)$

B. $[-3,-1]\cup[0,1]$

C. $[-1,0]\cup[1,+\infty)$

D. $[-1,0]\cup[1,3]$

解　因为 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，根据中心对称，如图 1，由 $xf(x-1)\geqslant 0$ 得：

$$\begin{cases}x\leqslant 0,\\ f(x-1)\leqslant 0,\end{cases} \text{或} \begin{cases}x\geqslant 0,\\ f(x-1)\geqslant 0,\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x\leqslant 0,\\ -2\leqslant x-1\leqslant 0.\end{cases}$

或 $\begin{cases}x\geqslant 0,\\ 0\leqslant x-1\leqslant 2.\end{cases}$

解得：$-1\leqslant x\leqslant 0$ 或 $1\leqslant x\leqslant 3$，故选 D.

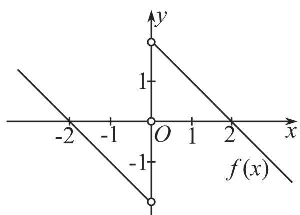

图 1

评注　由于奇函数图象关于原点对称，于是本题利用对称的思想方法，可帮助学生迅速找到解题思路，从而提高数学解题的准确率.

2　利用轴对称解题

例 3　已知 $x-y-2=0$，求函数 $f(x)=\sqrt{2x^2-8x+10}+\sqrt{2x^2-4x+10}$ 的最小值.

解　如图 2，设 $P(x,y)$ 为直线 l：$x-y-2=0$ 上任意一点，即 $x=y+2$，$f(x)=\sqrt{2x^2-8x+10}+\sqrt{2x^2-4x+10}=\sqrt{(x-1)^2+(x-3)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(x-3)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}+\sqrt{(x+1)^2+(y-1)^2}$，设 $A(-1,1)$，$B(1,1)$. 求得 B 关于 l 的对称点 $B_1(3,-1)$，则 $f(x)=|PA|+|PB|=|PA|+|PB_1|\geqslant|AB_1|=2\sqrt{5}$.

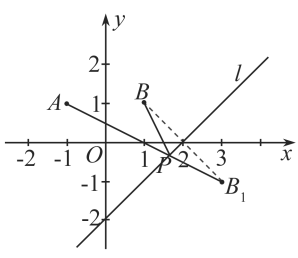

图 2

故 $[f(x)]_{\min}=2\sqrt{5}$.

评注　有些问题需要通过变形或挖掘，才能揭开它的神秘的面纱，本题通过变形发现两个根式其实就是两个两点间的距离，巧用对称思想，问题则迎刃而解.

例 4　（2012 年高考新课标理）设点 P 在曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上，点 Q 在曲线 $y=\ln(2x)$ 上，则 $|PQ|$ 的最小值为(　　).

A. $1-\ln 2$　　B. $\sqrt{2}(1-\ln 2)$

C. $1+\ln 2$　　D. $\sqrt{2}(1+\ln 2)$

解　因为函数 $y=\frac{1}{2}e^x$ 与函数 $y=\ln(2x)$ 是互为反函数，其图象关于直线 $y=x$ 对称，如图 3，分别在两曲线上点 P、Q 之间的最小距离就是曲线 $y=\frac{1}{2}e^x$ 上的点 $P\left(x,\frac{1}{2}e^x\right)$ 到直线 $y=x$ 的距离的两倍，点 P 到直线 $x-y=0$ 的距离 $d=\dfrac{\left|\frac{1}{2}e^x-x\right|}{\sqrt{2}}$.

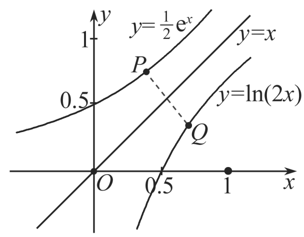

图 3

设 $f(x)=\frac{1}{2}e^x-x$，令导函数 $f'(x)=\frac{1}{2}e^x-1=0$，求得 $x=\ln 2$. 当 $x\in(-\infty,\ln 2)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递减，当 $x\in(\ln 2,+\infty)$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，所以函数 $f(x)$ 在 $x=\ln 2$ 处取得最小值. 即 $[f(x)]_{\min}=f(\ln 2)=1-\ln 2$. 所以 $d_{\min}=\dfrac{1-\ln 2}{\sqrt{2}}$. 所以 $|PQ|_{\min}=2\cdot\dfrac{1-\ln 2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}(1-\ln 2)$. 故选 B.

评注　本题求解的关键是要观察出这两个函数是互为反函数，其图象关于直线 $y=x$ 对称. 本题的解法告诉我们，有效地借用对称性思想，不但能够避免解题的繁琐，而且还能够发散学生的思维，培养学生的创新能力，激发学生学习数学的兴趣.

3　利用平面对称解题

例 5　三个边长为 12 的正方形都被连接两条相邻边的中点的直线分成 A，B 两片，如图 4 所示，把这六片粘在一个正六边形的外面，如图 5 所示，然后折成一个多面体，则这个多面体的体积是______.

解　如图 5，每个 B 片的两侧都是 A 片，要将其

粘合在一起就是要将三个直角顶点和边粘合在一起,其中点 S 就是图 5 中 N,L,H 三个点重合在一起的点.折成一个多面体如图 6,如果注意到将图中 QY,PX 延长必交于一点,得一正方形,可将原几何体补形成如图 7 所示的正方体,正方体两部分关于平面 XYZ 对称.其体积恰为一个棱长为 12 的正方体体积的一半,即 $V=\frac{1}{2}\times 12^3=864$.

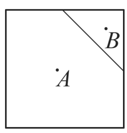

图 4

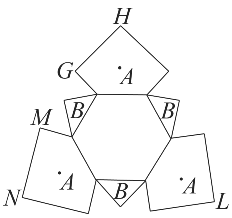

图 5

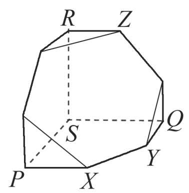

图 6

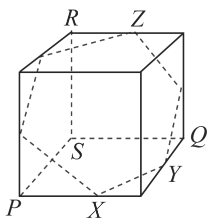

图 7

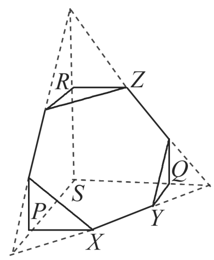

图 8

评注 本题中数学问题只具备对称性问题的一部分,根据问题的特征,将其补全为具有空间对称的问题,从而寻找到巧妙别致的解题思路.当然本题也可通过另外补形求解,由于 $PX /\!/ SQ, PX=\frac{1}{2}SQ$,则延长 SP,YX 必交于一点,从而可将原几何体补形成如图 8 所示的有三条长为 18 且两两互相垂直的棱所组成的正三棱锥,原几何体的体积为一个大的正三棱锥的体积减去三个相等的小正三棱锥的体积.

即 $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\times 18^2\right)\times 18-\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\times 6^2\right)\times 6\times 3=864$.显然这种解法没有利用对称思想方法简捷.

例 6 在60°的二面角 α-l-β 内一点 P 到两个半平面的距离分别为 2 和 3,且 M,N 分别是平面 α,β 内任意两点,则 $\triangle MNP$ 周长的最小值是______.

解 设点 P 关于平面 α 的对称点为 P_1,关于平面 β 的对称点为 P_2,连接 P_1,P_2 交平面 α 于 M,交平面 β 于 N,如图 9,是二面角的一个截面图,由对称性 $MP=MP_1,NP=NP_2$,此时 $\triangle MNP$ 周长为 $MP+NP+MN=MP_1+NP_2+MN\geqslant P_1P_2$,$\triangle MNP$ 周长的最小值等于 P_1、P_2 两点间的距离.此时 $PP_1=4,PP_2=6,\angle P_1PP_2=120^\circ$,所以 $P_1P_2{}^2=PP_1{}^2+PP_2{}^2-2PP_1\cdot PP_2\cos\angle P_1PP_2=4^2+6^2-2\times4\times6\times\cos120^\circ=76$,所以 $P_1P_2=2\sqrt{19}$.故 $\triangle MNP$ 周长的最小值是 $2\sqrt{19}$.

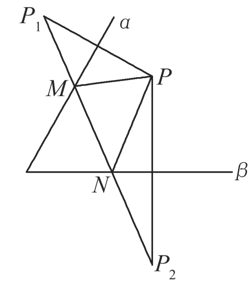

图 9

评注 本题的解法向我们展示了运用对称思想解题,不仅给我们解决数学问题带来了方便,更使我们充分感受到了数学的独特美,有助于拓展学生的思维空间,同时也彰显了数学的永恒魅力!

4 利用图形的对称特征解题

例 7 (2009 年高考安徽卷)给定两个长度为 1 的平面向量$\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OB}$,它们的夹角为120°,如图所示.点 C 在以 O 为圆心的圆弧 AB 上变动.若$\overrightarrow{OC}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}$,其中 $x,y\in\mathbf{R}$,则 $x+y$ 的最大值是______.

解 如图 10,当点 C 移到点 A 时,$x=1,y=0,x+y=1$;

当点 C 移到点 B 时,$x=0,y=1,x+y=1$;

可见点 C 移到圆弧 AB 的端点时,$x+y$ 的值是相等的,由于本题求的是 $x+y$ 的最大值,根据图形的对称性,应该是点 C 在圆弧 AB 中点时,$x+y$ 取得最大值.当 C 在圆弧 AB 的中点时,四边形 $OACB$ 为菱形,$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$,所以 $x=1,y=1,x+y=2$.故 $x+y$ 的最大值是 2.

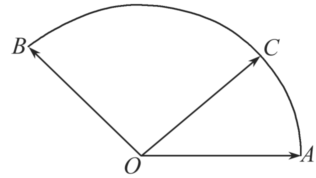

图 10

评注 本题图形对称特征明显,不难让我们联想到利用对称思想解题.对称是客观世界的一个侧面的反映,不仅具有很高的美学价值,更重要的它还是一种思想方法,本题的巧妙解法就是一个很好的例证.

例 8 (2017 全国 1 卷理)已知 F 为抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点,过 F 作两条互相垂直的直线 l_1,l_2,直线 l_1 与曲线 C 交于 A,B 两点,直线 l_2 与曲线 C 交于 D,E 两点,则 $|AB|+|DE|$ 的最小值为( ).

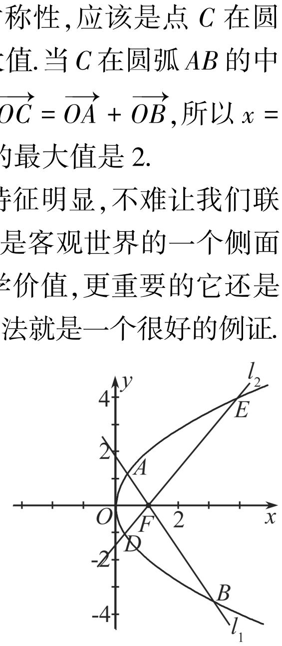

图 11

A.16 B.14

C.12 D.10

解　如图 11,当直线 l_1 或 l_2 的倾斜角趋向于 0 时, $|AB|+|DE|\to+\infty$,根据图形的对称性,故当直线 l_1,l_2 的倾斜角分别为 135°,45° 时 $|AB|+|DE|$ 的值最小.此时, $|AB|=|DE|=\dfrac{2p}{\sin^2 45^\circ}=\dfrac{4}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=8$,所以 $[|AB|+|DE|]_{\min}=16$,故选 A.

评注　本题中的直线 l_1 和 l_2 是动态的,当直线 l_1 的倾斜角变小时,弦 AB 长度变大,而直线 l_1 和 l_2 变化是同等的,根据对称性,只有当直线 l_1 和 l_2 关于 x 轴对称时, $|AB|+|DE|$ 方可取得最小.

5　利用代数式的对称性解题

例 9　(2012 年全国高中数学联赛甘肃省预赛试题) 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 满足 $f(0)=1$, 且对任意 x、$y\in\mathbf{R}$,都有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$, 则 $f(x)=$______.

解　因为对任意 x、$y\in\mathbf{R}$ 有 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$,①

根据 x、y 的任意性,将 x、y 互换得:$f(xy+1)=f(y)f(x)-f(x)-y+2$,②

由 ① 与 ② 相减得:$f(x)+y=f(y)+x$, 令 $y=0$ 得,$f(x)=x+1$.

评注　式子 $f(xy+1)=f(x)f(y)-f(y)-x+2$,中 x、y 只有任意性,但不具备对称性,将 x、y 互换得到 $f(xy+1)=f(y)f(x)-f(x)-y+2$,①、② 这两个式子具有对称性.可见有些数学问题只具备对称性问题的一部分或根本不具备对称性的问题,我们可通过类比、构造或变换为对称问题,再巧用对称思想使问题获解.

例 10　(2013 年河南省预赛试题) 已知 x、$y\in\mathbf{R}$,则 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-x-y$ 的最小值是______.

解　若将 y 视为定值,当 $x\to\infty$ 时,$f(x,y)\to+\infty$;若将 x 视为定值,当 $y\to\infty$ 时,$f(x,y)\to+\infty$;

根据代数式中 x,y 的对称性,应该在 $x=y$ 时, $f(x,y)$ 取得最小值.

此时 $f(x,y)=x^2+xy+y^2-x-y=3x^2-2x$,当 $x=\dfrac{1}{3}$ 时,$[f(x,y)]_{\min}=-\dfrac{1}{3}$.

评注　观察发现本题中 x、y 互换,解析式是不变的,可见 x、y 具有对称性.我们说对称,不仅是图形的对称,还有式子、子母等对称.如果我们能发现或挖掘问题中的对称特征,给解题会带来意想不到的神奇效果!

6　利用对称原理解题

例 11　将三个相同的红球和三个相同的黑球排成一排,然后从左至右依次给它们赋以编号 1,2,…,6.则红球的编号之和小于黑球编号之和的排法有多少种?

解　由题意,全部的排列办法有:$\dfrac{A_6^6}{A_3^3A_3^3}$ 种,因为红球和黑球编号之和没有相等的,只有红球的编号之和小于黑球的编号之和、红球的编号之和大于黑球的编号之和两种情形,且两种情形是同等的.利用对称思想,红球的编号之和小于黑球编号之和的排法共有:$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{A_6^6}{A_3^3A_3^3}=10$ 种.

评注　本题中的红球和黑球除颜色外没有什么区分,"地位" 相同,因而联想到利用对称思想解题.在排列与组合教学中,启发学生用对称思想思考数学问题是很有必要的,这对增强学生解决数学问题的能力、启迪心智都大有裨益.

例 12　已知 $x_i\geqslant 0(i=1,2,\cdots,n)$ 且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=\pi$,则 $\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n$ 的最大值是______.

解　显然式子中 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 具有同等的"地位",即有对称性,观察 $\sin x_1+\sin x_2$ 可知:因为 $\sin x_1+\sin x_2=2\sin\dfrac{x_1+x_2}{2}\cdot\cos\dfrac{x_1-x_2}{2}$ 只有在 $x_1=x_2$ 时才能取得最大值,即当 $x_1\neq x_2$ 时,$\sin x_1+\sin x_2$ 不可能取得最大值,于是由对称性可知,在 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 中,只要有两数不等,$\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n$ 就不会取得最大值,所以当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 时,$\sin x_1+\sin x_2+\cdots+\sin x_n$ 有最大值 $n\sin\dfrac{\pi}{n}$.

评注　当出现了等可能性情况时我们考虑对称法,不只是两个元素,当出现多个元素时也适用.

综上,我们强调的"对称" 应该是广义的,即,既要重视"形" 的对称性,更要发挥"思想方法" 的对称性,后者有更广泛的应用价值.但对称思想并不是万能的,它只是启发我们在解决问题时,多一种角度,多一种思路.

作者简介　方志平(1965—),男,安徽安庆人,中学数学正高级教师,广东省特级教师,发表文章 100 余篇.研究方向:高中数学解题教学.