江苏省仪征中学2020届高三下学期数学周末限时训练6（2020.4.25）

一、填空题（共14个小题）

1．已知集合 $A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{x|-1<x<1\}$，则 $A\cap B=$_______．

2．复数 $z=\frac{2i}{1+i}$（i 为虚数单位）的虚部为_______．

3．函数 $f(x)=\sqrt{\log_2 x-2}$ 的定义域为_______．

4．在编号为1，2，3，4，5且大小和形状均相同的五张卡片中，一次随机抽取其中的两张，则抽取的两张卡片编号之和是偶数的概率为_______．

5．在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为 $\frac{5}{4}$，则该双曲线的渐近线方程为_______．

6．某种圆柱形的如罐的容积为 128π 个立方单位，当它的底面半径和高的比值为_______时，可使得所用材料最省．

7．在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{3}-y^2=1$ 的右准线与渐近线的交点在抛物线 $y^2=2px$ 上，则实数 p 的值为_______．

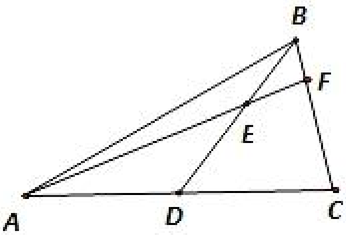
8．已知 α 是第二象限角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\tan(\alpha+\beta)=-2$，则 $\tan\beta=$_______．

9．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=6$，$S_6=-8$，则 $S_9=$_______．

10．在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l：$y=\frac{1}{2}$ 与函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$（$\omega>0$）的图象在 y 轴右侧的公共点从左到右依次为 A_1，A_2…，若点 A_1 的横坐标为1．则点 A_2 的横坐标为_______．

11．设 P 为有公共焦点 F_1，F_2 的椭圆 C_1 与双曲线 C_2 的一个交点，且 $PF_1\perp PF_2$，椭圆 C_1 的离心率为 e_1，双曲线 C_2 的离心率为 e_2，若 $e_2=3e_1$，则 $e_1=$_______．

12．如图，在△ABC 中，$AB=AC=2$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EB}$，$AE$ 的延长线交 BC 边于点 F，若 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{4}{5}$，则 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=$_______．



13．已知函数 $f(x)$ 是定义在R上的奇函数，其图象关于直线 $x=1$ 对称，当 $x\in(0,1]$ 时，$f(x)=-e^{ax}$（其中 e 是自然对数的底数），若 $f(2020-\ln 2)=8$，则实数 a 的值为_______．

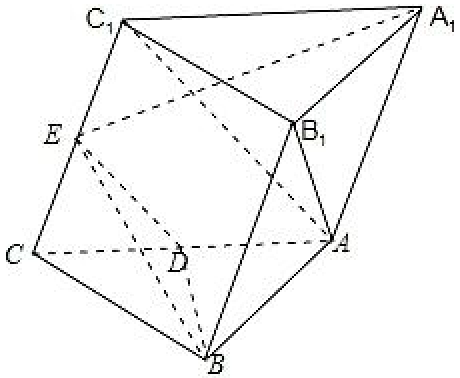
14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{ex}{e^x}, & x\leqslant 2\\ \frac{4x-8}{5x}, & x>2\end{cases}$（其中 e 为自然对数的底数），若关于 x 的方程 $f^2(x)-3a|f(x)|+2a^2=0$ 恰有5个相异的实根，则实数 a 的取值范围为_______．

二、解答题

15．如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知△ABC 为正三角形，D，E 分别是 AC，CC_1 的中点，平面 AA_1C_1C⊥平面 ABC，A_1E⊥AC_1．

（1）求证：DE∥平面 AB_1C_1；

（2）求证：A_1E⊥平面 BDE．



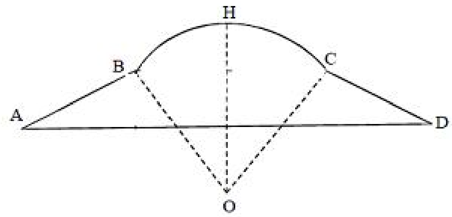
16．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

（1）若 $a=5$，$c=2\sqrt{5}$，求 b 的值；（2）若 $B=\frac{\pi}{4}$，求 $\tan 2C$ 的值．

17．某模具厂设计如图模具，模具是由线段 AB,CD 和与它们相切圆弧 BC 及线段 AD 四部分组成的平面图形．圆弧 BC 所在圆的半径为 8cm， B,C 距线段 AD 距离为圆弧 BC 中点 H 到线段 AD 距离的一半且不超过 4cm，设 $\angle BAD=\theta$，模具周长去掉线段 AD 长后记为 $f(\theta)$，当 $f(\theta)$ 最大时称模具为“最佳比例模具”．

（1）求 $f(\theta)$ 的解析式，并求定义域；

（2）求“最佳比例模具”的长度．



18．在平面直角坐标系 xOy 中，椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右准线方程为 $x=2$，且两焦点与短轴的一个顶点构成等腰直角三角形．

（1）求椭圆 C 的方程；

（2）假设直线 l：$y=kx+m$ 与椭圆 C 交于 A，B 两点．

①若 A 为椭圆的上顶点，M 为线段 AB 中点，连接 OM 并延长交椭圆 C 于 N，并且$\overrightarrow{ON}=\frac{\sqrt{6}}{2}\overrightarrow{OM}$，求 OB 的长；

②若原点 O 到直线 l 的距离为 1，并且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\lambda$，当$\frac{4}{5}\leqslant\lambda\leqslant\frac{5}{6}$时，求△$OAB$ 的面积 S 的范围．

19．已知整数数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2$，且$a_n^2-1<a_{n-1}a_{n+1}<a_n^2+1(n\in N,n\geq 2)$.数列$\{b_n\}$是等差数列，令集合$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$，$n\in N^*$.将集合$A\bigcup B$中的元素按从小到大的顺序排列构成的数列记为$\{c_n\}$.

（1）若$c_n=n$，$n\in N^*$，求数列$\{b_n\}$的通项公式;

（2）若$A\bigcap B=\phi$，数列$\{c_n\}$的前5项成等比数列，且$c_1=1$，$c_9=8$，求满足$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}>\dfrac{5}{4}$的正整数$n$的个数.

20．已知$f(x)=x^3+ax^2+bx$，a，$b\in R$.

（1）若$b=1$，且函数$f(x)$在区间$(-1,\dfrac{1}{2})$上单调递增，求实数a的范围;

（2）若函数$f(x)$有两个极值点x_1，x_2，$x_1<x_2$，且存在x_0满足$x_1+2x_0=3x_2$，令函数$g(x)=f(x)-f(x_0)$，试判断$g(x)$零点的个数并证明你的结论.

江苏省仪征中学2020届高三下学期数学周末限时训练6

附加题

21．已知矩阵 $M=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ t & 1 \end{bmatrix}$的一个特征值为4，求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1}.

22．在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}t \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t+2 \end{cases}$（$t$ 为参数），在以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴，且与直角坐标系长度单位相同的极坐标系中，曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=4\sqrt{2}\sin(\dfrac{\pi}{4}+\theta)$.

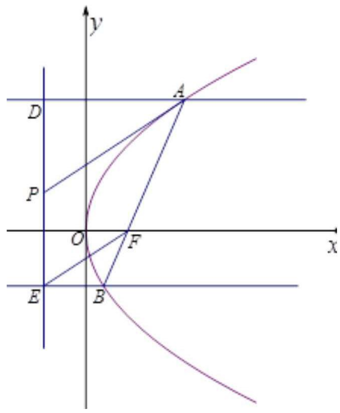
（1）求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程；

（2）若直线 l 与曲线 C 相交于两点 A，B，求线段 AB 的长.

23．如图，已知抛物线：C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点 F 在直线 $x+y-1=0$ 上，平行于 x 轴的两条直线 l_1，l_2 分别交抛物线线 C 于 A，B 两点，交该抛物线的准线于 D，E 两点．

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）若 F 在线段 AB 上，P 是 DE 的中点，证明：$AP \parallel EF$．



24．在开展学习强国的活动中，某校高三数学教师成立了党员和非党员两个学习组，其中党员学习组有 4 名男教师、1 名女教师，非党员学习组有 2 名男教师、2 名女教师，高三数学组计划从两个学习组中随机各选 2 名教师参加学校的挑战答题比赛．

（1）求选出的 4 名选手中恰好有一名女教师的选派方法数；

（2）记 X 为选出的 4 名选手中女教师的人数，求 X 的概率分布和数学期望．

参考答案

一、填空题

1．已知集合 $A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{x|-1<x<1\}$，则 $A\cap B=$ $\underline{\{x|0<x<1\}}$．

解：$\because A=\{x|0<x<2\}$，$B=\{x|-1<x<1\}$，

$\therefore A\cap B=\{x|0<x<1\}$．

故答案为：$\{x|0<x<1\}$．

2．复数 $z=\frac{2i}{1+i}$（i 为虚数单位）的虚部为 $\underline{\ 1\ }$．

解：$z=\frac{2i}{1+i}=\frac{2i(1-i)}{(1+i)(1-i)}=i+1$ 的虚部为 1．

故答案为：1．

3．函数 $f(x)=\sqrt{\log_2x-2}$ 的定义域为 $\underline{[4，+\infty)．}$．

解：函数 $f(x)=\sqrt{\log_2x-2}$ 有意义，

只需 $\log_2x-2\geqslant 0$，且 $x>0$，

解得 $x\geqslant 4$．

则定义域为 $[4，+\infty)$．

故答案为：$[4，+\infty)$．

4．在编号为 1，2，3，4，5 且大小和形状均相同的五张卡片中，一次随机抽取其中的两张，则抽取的两张卡片编号之和是偶数的概率为 $\underline{\frac{2}{5}}$．

解：在编号为 1，2，3，4，5 且大小和形状均相同的五张卡片中，

一次随机抽取其中的两张，

基本事件总数为 $n=C_5^2=10$，

抽取的两张卡片编号之和是偶数包含的基本事件个数：

$m=C_3^2+C_2^2=4$，

则抽取的两张卡片编号之和是偶数的概率为 $p=\frac{4}{10}=\frac{2}{5}$．

故答案为：$\frac{2}{5}$.

5．在平面直角坐标系 xOy 中，若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为$\frac{5}{4}$，则该双曲线的渐近线方程为__$y=\pm\frac{3}{4}x$__.

解：因为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>0$，$b>0$）的离心率为$\frac{5}{4}$，可得$\frac{c}{a}=\frac{5}{4}$，所以$\frac{b}{a}=\frac{3}{4}$，所以渐近线方程为 $y=\pm\frac{3}{4}x$.

故答案为：$y=\pm\frac{3}{4}x$.

6．某种圆柱形的如罐的容积为 128π个立方单位，当它的底面半径和高的比值为__$\frac{1}{2}$__时，可使得所用材料最省.

解：如图所示，

设圆柱的高为 h，底面半径为 r.

由题意，$128\pi=\pi r^2\cdot h$，

$\therefore S=2\pi r^2+2\pi r\cdot h=2\pi r^2+2\pi r\cdot\frac{128}{r^2}=2\pi r^2+\frac{256\pi}{r}$

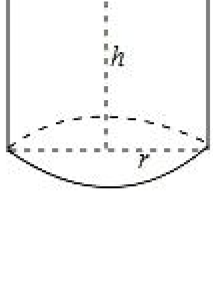
$=2\pi r^2+\frac{128\pi}{r}+\frac{128\pi}{r}\geqslant 3\sqrt{2\pi r^2\cdot\frac{128\pi}{r}\cdot\frac{128\pi}{r}}=384\pi\sqrt{2\pi}$.

当且仅当$2\pi r^2=\frac{128\pi}{r}$，即当 $r=4$ 时取等号.

此时 $h=\frac{128}{r^2}=8$.

$\therefore$它的底面半径和高的比值为$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

故答案为：$\frac{1}{2}$.



7．在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的右准线与渐近线的交点在抛物线 $y^2=2px$ 上，则实数 p 的值为__$\frac{1}{4}$__．

解：双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的右准线 $x=\frac{3}{2}$，渐近线 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$，

双曲线$\frac{x^2}{3}-y^2=1$的右准线与渐近线的交点（$\frac{3}{2}$，$\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$），

交点在抛物线 $y^2=2px$ 上，

可得：$\frac{3}{4}=3p$，

解得 $p=\frac{1}{4}$．

故答案为：$\frac{1}{4}$．

8．已知α是第二象限角，且$\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，tan（α+β）＝－2，则 tanβ＝____$-\frac{3}{4}$__．

解：∵α是第二象限角，且 $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，

∴$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$\tan\alpha=-\frac{1}{2}$，

∵$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{-\frac{1}{2}+\tan\beta}{1-(-\frac{1}{2})\tan\beta}=-2$；

∴$\tan\beta=-\frac{3}{4}$．

故答案为：$-\frac{3}{4}$．

9．已知等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_3=6$，$S_6=-8$，则 $S_9=$___－42___．

解：由题意可得：$2\times(-8-6)=6+S_9-(-8)$，解得 $S_9=-42$．

故答案为：－42．

10．在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l：$y=\frac{1}{2}$与函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$（$\omega>0$）的图象在 y 轴右侧的公共点从左到右依次为 A_1，A_2…，若点 A_1 的横坐标为 1．则点 A_2 的横坐标为 3__．

解：因为点 A_1 的横坐标为 1，即当 $x=1$ 时，$f(x)=\sin(\omega+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，

所以 $\omega+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{\pi}{6}$ 或 $\omega+\frac{\pi}{6}=2k\pi+\frac{5\pi}{6}$（$k\in Z$），

又直线 l：$y=\frac{1}{2}$ 与函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{6})$（$\omega>0$）的图象在 y 轴右侧的公共点从左到右依次为 A_1，$A_2\cdots$，

所以 $\omega+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，

故 $\omega=\frac{2\pi}{3}$，

所以：函数的关系式为 $f(x)=\sin(\frac{2\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})$．

当 $x_2=3$ 时，$f(3)=\sin(\frac{2\pi}{3}\times3+\frac{\pi}{6})=\frac{1}{2}$，

即点 A_2 的横坐标为 3，$(3，\frac{1}{2})$ 为二函数的图象的第二个公共点．

故答案为：3．

11．设 P 为有公共焦点 F_1，F_2 的椭圆 C_1 与双曲线 C_2 的一个交点，且 $PF_1\perp PF_2$，椭圆 C_1 的离心率为 e_1，双曲线 C_2 的离心率为 e_2，若 $e_2=3e_1$，则 $e_1=$__$\frac{\sqrt{5}}{3}$__．

解：如图，由椭圆定义及勾股定理得，

$\begin{cases}|PF_1|+|PF_2|=2a_1\\|PF_1|^2+|PF_2|^2=4c^2\end{cases}$，可得 $S_{\triangle PF_1F_2}=b_1^2$，

$\because e_1=\frac{c}{a_1}$，$\therefore a_1=\frac{c}{e_1}$，

$\therefore b_1^2=a_1^2-c^2=c^2(\frac{1}{e_1^2}-1)$，

同理可得 $S_{\triangle PF_1F_2}=b_2^2$，

$\because e_2=\frac{c}{a_2}$，$\therefore a_2=\frac{c}{e_2}$，

$\therefore b_2^2=c^2-a_2^2=c^2(1-\frac{1}{e_2^2})$，

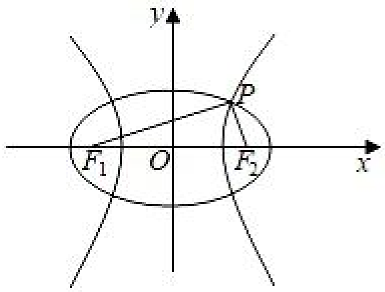
$\therefore c^2(\frac{1}{e_1^2}-1)=c^2(1-\frac{1}{e_2^2})$，

即$\frac{1}{e_1^{2}}+\frac{1}{e_2^{2}}=2$，

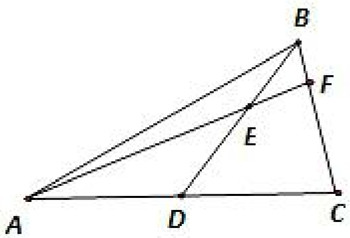
$\because e_2=3e_1$，

$\therefore e_1=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

故答案为：$\frac{\sqrt{5}}{3}$.



12．如图，在△ABC 中，$AB=AC=2$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，$\overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EB}$，$AE$ 的延长线交 BC 边于点 F，若 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{4}{5}$，则$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=$__$\frac{22}{9}$__.



解：作 $DG\parallel AF$ 交 BC 于 G；

$\therefore \overrightarrow{DE}=2\overrightarrow{EB}$，

$\therefore FE=\frac{1}{3}DG$；$BF=\frac{1}{2}FG$；　①

$\because \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DC}$，

$\therefore DG=\frac{1}{2}AF$；$FG=GC$；　②

联立①②可得 $EF=\frac{1}{6}AF$；$AE=\frac{5}{6}AF$；$BF=\frac{1}{5}BC$；

$\because \overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{BC}=-\frac{4}{5}$

$=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{BC})\cdot\overrightarrow{BC}$

$=-[\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})]\bullet(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=-(\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC})\bullet(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC})$

$=-[\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}^2-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}-\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}^2]$

$=-[\frac{4}{5}\times2^2-\frac{3}{5}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}-\frac{1}{5}\times2^2]$

$\therefore\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=\frac{8}{3}$;

则$\overrightarrow{AE}\bullet\overrightarrow{AC}=\frac{5}{6}\overrightarrow{AF}\bullet\overrightarrow{AC}$

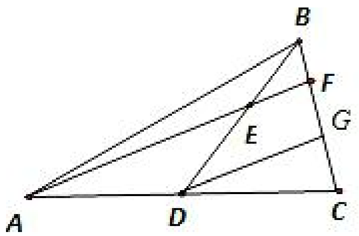
$=\frac{5}{6}\times(\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC})\bullet\overrightarrow{AC}$

$=\frac{5}{6}\times(\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}+\frac{1}{5}\overrightarrow{AC}^2)$

$=\frac{5}{6}\times(\frac{4}{5}\times\frac{8}{3}+\frac{1}{5}\times2^2)$

$=\frac{22}{9}$;

故答案为：$\frac{22}{9}$.



13．已知函数$f(x)$是定义在R上的奇函数，其图象关于直线$x=1$对称，当$x\in(0，1]$时，$f(x)=-e^{ax}$（其中e是自然对数的底数），若$f(2020-ln2)=8$，则实数a的值为__3__．

解：根据题意，$f(x)$的图象关于$x=1$对称，所以$f(1+x)=f(1-x)$

又由$f(x)$是R上的奇函数，所以$f(x+1)=-f(x-1)$，则有$f(x+2)=-f(x)$，$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$．

则$f(x)$是周期为4的函数，

故$f(2020-ln2)=f(-ln2)=-f(ln2)=-(-e^{x\bullet ln2})=8$，

变形可得：$2^x=8$，解可得$x=3$；

故答案为：3

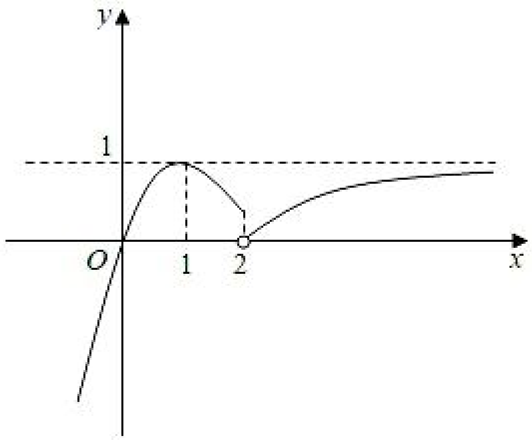
14．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ex}{e^x}, & x\leqslant 2\\ \dfrac{4x-8}{5x}, & x>2\end{cases}$（其中 e 为自然对数的底数），若关于 x 的方程 $f^2(x)-3a|f(x)|+2a^2=0$ 恰有 5 个相异的实根，则实数 a 的取值范围为 $\underline{\{\frac{1}{2}\}\cup[\frac{2}{e},\frac{4}{5})}$．

解：当 $x\leqslant 2$ 时，令 $f'(x)=\frac{e}{e^x}-1=0$，解得 $x=1$，

所以当 $x\leqslant 1$ 时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增，当 $1\leqslant x\leqslant 2$ 时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减，

当 $x>2$ 时，$f(x)=\frac{4x-8}{5x}=\frac{4}{5}-\frac{8}{5x}$ 单调递减，且 $f(x)\in[0,\frac{4}{5})$

作出函数 $f(x)$ 的图象如图：



（1）当 $a=0$ 时，方程整理得 $f^2(x)=0$，只有 2 个根，不满足条件；

（2）若 $a>0$，则当 $f(x)<0$ 时，方程整理得 $f^2(x)+3af(x)+2a^2=[f(x)+2a][f(x)+a]=0$，

则 $f(x)=-2a<0$，$f(x)=-a<0$，此时各有 1 解，

故当 $f(x)>0$ 时，方程整理得 $f^2(x)-3af(x)+2a^2=[f(x)-2a][f(x)-a]=0$，

$f(x)=2a$ 有 1 解同时 $f(x)=a$ 有 2 解，即需 $2a=1$，$a=\frac{1}{2}$，因为 $f(2)=\frac{2e}{e^2}=\frac{2}{e}>\frac{1}{2}$，故此时满足题意；

或 $f(x)=2a$ 有 2 解同时 $f(x)=a$ 有 1 解，则需 $a=0$，由（1）可知不成立；

或 $f(x)=2a$ 有 3 解同时 $f(x)=a$ 有 0 解，根据图象不存在此种情况，

或 $f(x)=2a$ 有 0 解同时 $f(x)=a$ 有 3 解，则 $\begin{cases}2a>1\\ \frac{2}{e}\leqslant a<\frac{4}{5}\end{cases}$，解得 $\frac{2}{e}\leqslant a<\frac{4}{5}$，

故 $a\in[\frac{2}{e},\frac{4}{5})$

（3）若 $a<0$，显然当 $f(x)>0$ 时，$f(x)=2a$ 和 $f(x)=a$ 均无解，

当 $f(x)<0$ 时，$f(x)=-2a$ 和 $f(x)=-a$ 无解，不符合题意.

综上：a 的范围是 $\{\frac{1}{2}\}\cup[\frac{2}{e},\frac{4}{5})$

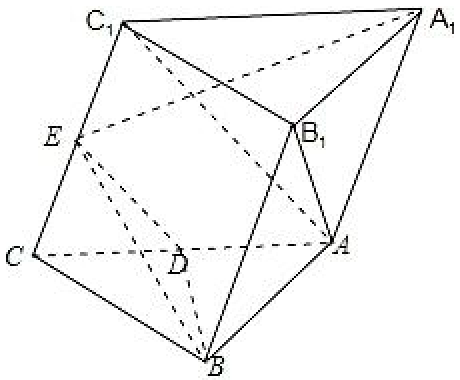
故答案为 $\{\frac{1}{2}\}\cup[\frac{2}{e},\frac{4}{5})$

二、解答题：共 6 小题，共 90 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15．如图，在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，已知△ABC 为正三角形，D，E 分别是 AC，CC_1 的中点，平面 AA_1C_1C⊥平面 ABC，$A_1E\perp AC_1$.

（1）求证：DE∥平面 AB_1C_1；

（2）求证：A_1E⊥平面 BDE.



解：（1）证明：D，E 分别是 AC，CC_1 的中点，

∴$DE\parallel AC_1$，$DE\not\subset$平面 AB_1C_1，

∵$AC_1\subsetneq$ 平面 AB_1C_1，

故 DE∥平面 AB_1C_1；---------------------------------------6 分

（2）证明：△ABC 为正三角形，所以 $BD\perp AC$，

因为平面 AA_1C_1C⊥平面 ABC，平面 AA_1C_1C∩平面 ABC＝AC，

故 BD⊥平面 AA_1C_1C，$A_1E\subset$平面 AA_1C_1C，

所以 $BD\perp A_1E$，又 $A_1E\perp AC_1$，$DE/\!/AC_1$，所以 $A_1E\perp DE$，

又 $BD\cap DE=D$，

所以 $A_1E\perp$ 平面 BDE．--14 分

16．在△ABC 中，角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，且 $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$．

（1）若 $a=5$，$c=2\sqrt{5}$，求 b 的值；

（2）若 $B=\frac{\pi}{4}$，求 $\tan 2C$ 的值．

解：（1）在△ABC 中，由余弦定理 $b^2+c^2-2bc\cos A=a^2$，

得 $b^2+20-2\times 2\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{5}}{5}b=25$，即 $b^2-4b-5=0$，

解得 $b=5$ 或 $b=-1$（舍），所以 $b=5$．--------------------7 分

（2）由 $\cos A=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 及 $0<A<\pi$ 得，$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{5}}{5})^2}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

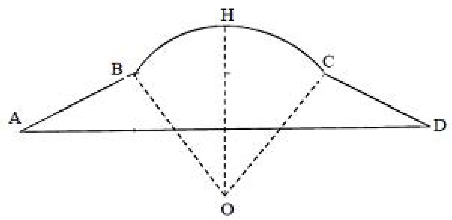
所以 $\cos C=\cos(\pi-(A+B))=-\cos(A+\frac{\pi}{4})=-\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos A-\sin A)=\frac{\sqrt{10}}{10}$，

又因为 $0<C<\pi$，所以 $\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\sqrt{1-(\frac{\sqrt{10}}{10})^2}=\frac{3\sqrt{10}}{10}$，

从而 $\tan C=\frac{\sin C}{\cos C}=\frac{\frac{3\sqrt{10}}{10}}{\frac{\sqrt{10}}{10}}=3$，

所以 $\tan 2C=\frac{2\tan C}{1-\tan^2 C}=\frac{2\times 3}{1-3^2}=-\frac{3}{4}$．---------------------------------------14 分

17．某模具厂设计如图模具，模具是由线段 AB,CD 和与它们相切圆弧 BC 及线段 AD 四部分组成的平面图形．圆弧 BC 所在圆的半径为 8cm， B,C 距线段 AD 距离为圆弧 BC 中点 H 到线段 AD 距离的一半且不超过 4cm，设 $\angle BAD=\theta$，模具周长去掉线段 AD 长后记为 $f(\theta)$，当 $f(\theta)$ 最大时称模具为“最佳比例模具”．

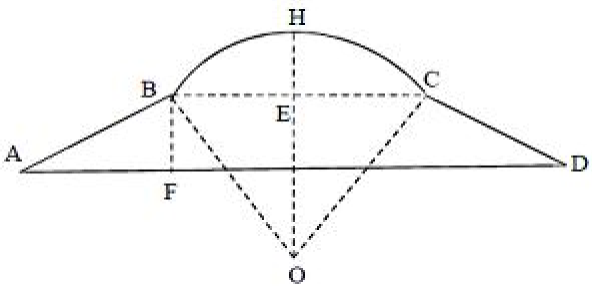


（1）求 $f(\theta)$ 的解析式，并求定义域；

（2）求“最佳比例模具”的长度.

【解析】（1）设圆弧 BC 所在圆的圆心为 O,连接线段 BC,连 OH 交 BC 于 E，则 $OE \perp BC$，

过 B 作 $BF \perp AD$ 于 F，



$\because \angle BAD=\theta, OB \perp AB, \therefore \angle BOE=\theta$，

$\because OB=8$，

$\therefore BE=8\sin\theta, OE=8\cos\theta$，

$\because BF=HE=8-8\cos\theta$，

$\because AB=\dfrac{BF}{\sin\theta}=\dfrac{8-8\cos\theta}{\sin\theta}$，

$\therefore f(\theta)=2AB+BC=\dfrac{16-16\cos\theta}{\sin\theta}+16\theta$，------------------------------6 分

$\because 8-8\cos\theta \le 4$，

$\therefore \cos\theta \ge \dfrac{1}{2}, \therefore 0<\theta \le \dfrac{\pi}{3}$，

综上知 $f(\theta)=\dfrac{16-16\cos\theta}{\sin\theta}+16\theta \ (0<\theta \le \dfrac{\pi}{3})$；-----------------------8 分

(2)由(1)可得 $f'(\theta)=16(\frac{\sin^2\theta-\cos\theta+\cos^2\theta}{\sin^2\theta}+1)$ $=16(\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}+1)$

$=16(\frac{1}{1+\cos\theta}+1)$，---------10 分

因为 $0<\theta\le\frac{\pi}{3}$，所以 $f(\theta)$ 在 $(0,\frac{\pi}{3}]$ 上是增函数，

所以 $f(\theta)$ 的最大值为 $f(\frac{\pi}{3})=\frac{16\sqrt{3}+16\pi}{3}$ cm．------------13 分

答："最佳比例模具"的长度 $\frac{16\sqrt{3}+16\pi}{3}$ *cm.*   ------------14 分

18．在平面直角坐标系 *xOy* 中，椭圆 *C*：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的右准线方程为 *x*＝2，且两焦点与短轴的一个顶点构成等腰直角三角形．

（1）求椭圆 *C* 的方程；

（2）假设直线 *l*：*y*＝*kx*+*m* 与椭圆 *C* 交于 *A*，*B* 两点．①若 *A* 为椭圆的上顶点，*M* 为线段 *AB* 中点，连接 *OM* 并延长交椭圆 *C* 于 *N*，并且$\overrightarrow{ON}=\frac{\sqrt{6}}{2}\overrightarrow{OM}$，求 *OB* 的长；②若原点 *O* 到直线 *l* 的距离为 1，并且$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\lambda$，当$\frac{4}{5}\leqslant\lambda\leqslant\frac{5}{6}$时，求△*OAB* 的面积 *S* 的范围．

解：（1）因为两焦点与短轴的一个顶点的连线构成等腰直角三角形，所以 *a*＝$\sqrt{2}c$，

又由右准线方程为 *x*＝2，得到$\frac{a^2}{c}$＝2，

解得　*a*＝$\sqrt{2}$，$c=1$，所以 $b^2=a^2-c^2=1$

所以，椭圆 *C* 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$----------------------4 分

（2）设 *B*（x_1，y_1），而 *A*（0，1），则 *M*（$\frac{x_1}{2}$，$\frac{1+y_1}{2}$），

∵$\overrightarrow{ON}=\frac{\sqrt{6}}{2}\overrightarrow{OM}$，∴*N*（$\frac{\sqrt{6}x_1}{4}$，$\frac{\sqrt{6}(1+y_1)}{4}$），

因为点 B，N 都在椭圆上，所以$\begin{cases}\dfrac{x_1^2}{2}+y_1^2=1\\ \dfrac{3x_1^2}{16}+\dfrac{3(1+y_1)^2}{8}=1\end{cases}$，解得：$y_1=\dfrac{1}{3}$，$x_1^2=\dfrac{16}{9}$

所以$OB=\sqrt{x_1^2+y_1^2}=\sqrt{\dfrac{16}{9}+\left(\dfrac{1}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$--------------------------------8 分

（3）由原点 O 到直线 l 的距离为 1，得$\dfrac{|m|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，化简得：$1+k^2=m^2$

联立直线 l 的方程与椭圆 C 的方程：$\begin{cases}y=kx+m\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1\end{cases}$，得（$1+2k^2$）$x^2+4kmx+2m^2-2=0$

设 A（x_1，y_1），B（x_2，y_2），则 $x_1+x_2=-\dfrac{4km}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}$，且△$=8k^2>0$，

∴$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=x_1x_2+y_1y_2=x_1x_2+(kx_1+m)(kx_2+m)=(1+k^2)x_1x_2+km(x_1+x_2)+m^2$

$=(1+k^2)\dfrac{2m^2-2}{1+2k^2}-\dfrac{4k^2m^2}{1+2k^2}+m^2=\dfrac{2m^2-2+2k^2m^2-2k^2-4k^2m^2+m^2+2k^2m^2}{1+2k^2}=$

$\dfrac{3m^2-2-2k^2}{1+2k^2}=\dfrac{1+k^2}{1+2k^2}=\lambda$

所以 $k^2=\dfrac{1-\lambda}{2\lambda-1}$，---------------------12 分

所以△OAB 的面积 $S=\dfrac{1}{2}\times1\times AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{1+k^2}\sqrt{\dfrac{8k^2}{(1+2k^2)^2}}=\sqrt{2}\sqrt{\dfrac{(1+k^2)k^2}{(1+2k^2)^2}}=\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}$，

因为 $S=\sqrt{2\lambda(1-\lambda)}$在$[\dfrac{4}{5}，\dfrac{5}{6}]$为单调减函数，

并且当$\lambda=\dfrac{4}{5}$时，$S=\dfrac{2\sqrt{2}}{5}$，当$\lambda=\dfrac{5}{6}$时，$S=\dfrac{\sqrt{10}}{6}$，

所以△OAB 的面积 S 的范围为 $[\dfrac{\sqrt{10}}{6}，\dfrac{2\sqrt{2}}{5}]$---------------------------16 分

19． 已知整数数列$\{a_n\}$满足$a_1=1,a_2=2$，且$a_n^2-1<a_{n-1}a_{n+1}$

$< a_n^2+1(n\in N,n\geq 2)$. 数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，令集合 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$ ，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$ ，$n\in N^*$.将集合 $A\bigcup B$ 中的元素按从小到大的顺序排列构成的数列记为 $\{c_n\}$.

（1）若 $c_n=n$ ，$n\in N^*$ ，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

（2）若 $A\bigcap B=\phi$ ，数列 $\{c_n\}$ 的前 5 项成等比数列，且 $c_1=1$ ，$c_9=8$ ，求满足 $\dfrac{c_{n+1}}{c_n}>\dfrac{5}{4}$ 的正整数 n 的个数.

（1）因为整数数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_n^2-1< a_{n-1}a_{n+1}< a_n^2+1(n\in N,n\geq 2)$ ，

所以 $a_n^2=a_{n-1}a_{n+1}(n\in N,n\geq 2)$ ，又 $a_1=1,a_2=2$ ，所以 $a_n=2^{n-1}$.

因为 $c_n=n$ ，且 5，6，7 $\notin A$ ，所以 5，6，7 $\in B$ ，--------------3 分

由此可见，等差数列 $\{b_n\}$ 的公差为 1，而 3 是数列 $\{b_n\}$ 中的项，

所以 3 只可能是数列 $\{b_n\}$ 中的第 1 项、第 2 项及第 3 项（注意：集合 A 与 B 可能有公共元素）.

若 $b_1=3$ ，则 $b_n=n+2$ ；若 $b_2=3$ ，则 $b_n=n+1$ ；若 $b_3=3$ ，则 $b_n=n$. ---------6 分

（2）首先对元素 2 进行分类讨论：

①若 2 是数列 $\{c_n\}$ 的第 2 项，由 $\{c_n\}$ 的前 5 项成等比数列得，$c_4=c_2\times 2^2=8=c_9$ ，这显然不可能；------------8 分

②若 2 是数列 $\{c_n\}$ 的第 3 项，由 $\{c_n\}$ 的前 5 项成等比数列，得 ${b_1}^2=2$ ，因为数列 $\{c_n\}$ 是将集合 $A\bigcup B$ 中的元素按从小到大的顺序排列构成的，所以 $b_n>0$ ，则 $b_1=\sqrt{2}$ ，因此数列 $\{c_n\}$ 的前 5 项分别为 1，$\sqrt{2}$ ，2，$2\sqrt{2}$ ，4，这样 $b_n=\sqrt{2}n$ ，则数列 $\{c_n\}$ 的前 9 项分别为 1，$\sqrt{2}$ ，2，$2\sqrt{2}$ ，4，$3\sqrt{2}$ ，$4\sqrt{2}$ ，$5\sqrt{2}$ ，8，上述数列符合要求；----10 分

③若 2 是数列 $\{c_n\}$ 的第 k 项（$k\geq 4$），则 $b_2-b_1<2-1$ ，即数列 $\{b_n\}$ 的公差 $d<1$ ，所以

$b_6=b_1+5d<2+5=7$，因为$c_9=8$，所以 1，2，4 在数列$\{c_n\}$的前 8 项中，由于$A\bigcap B=\phi$，

这样，b_1，b_2，…，b_6以及 1，2，4 共 9 项，它们均小于 8，即数列$\{c_n\}$的前 9 项均小于 8，

这与$c_9=8$矛盾．综上所述，$b_n=\sqrt{2}n$．------13 分

其次，当$n\le 4$时，$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\sqrt{2}>\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{c_6}{c_5}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}<\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{c_7}{c_6}=\dfrac{4}{3}>\dfrac{5}{4}$，当$n\ge 7$时，$c_n\ge 4\sqrt{2}$，

因为$\{b_n\}$是公差为$\sqrt{2}$的等差数列，所以$c_{n+1}-c_n\le\sqrt{2}$，

所以$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=\dfrac{c_n+c_{n+1}-c_n}{c_n}=1+\dfrac{c_{n+1}-c_n}{c_n}\le 1+\dfrac{\sqrt{2}}{4\sqrt{2}}=\dfrac{5}{4}$，此时的$n$不符合要求．

所以符合要求的n一共有 5 个．------------------------16 分

20．已知 $f(x)=x^3+ax^2+bx$，a，$b\in$R．

（1）若 $b=1$，且函数 $f(x)$ 在区间（－1，$\frac{1}{2}$）上单调递增，求实数 a 的范围；

（2）若函数 $f(x)$ 有两个极值点 x_1，x_2，$x_1<x_2$，且存在 x_0 满足 $x_1+2x_0=3x_2$，令函数 $g(x)=f(x)-f(x_0)$，试判断 $g(x)$ 零点的个数并证明你的结论．

解：$f'(x)=3x^2+2ax+b$，（$x\in$R），

（1）当 $b=1$ 时，$f'(x)=3x^2+2ax+1$，因为 $f(x)$ 在区间（－1，$\frac{1}{2}$）上单调递增

所以当 $x\in$（－1，$\frac{1}{2}$）时，$f'(x)=3x^2+2ax+1\geqslant 0$ 恒成立．

函数 $f'(x)=3x^2+2ax+1$ 的对称轴为 $x=-\frac{a}{3}$.

①$-\frac{a}{3}<-1$，即 $a>3$ 时，$f'(-1)\geqslant 0$，

即 $3-2a+1\geqslant 0$，解之得 $a\leqslant\frac{3}{2}$，解集为空集；

②$-1\leqslant-\frac{a}{3}\leqslant\frac{1}{2}$，即$-\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant 3$时，$f'(-\frac{a}{3})\geqslant 0$

即$3\cdot\frac{a^2}{9}+2a\cdot(-\frac{a}{3})+1\geqslant 0$，解之得$-\sqrt{3}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$，所以$-\frac{3}{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$

③$-\frac{a}{3}>\frac{1}{2}$，即 $a<-\frac{3}{2}$时，$f'(\frac{1}{2})\geqslant 0$

即 $3\cdot\frac{1}{4}+a+1\geqslant 0$，解之得 $a\geqslant-\frac{7}{4}$，所以$-\frac{7}{4}\leqslant a<-\frac{3}{2}$

综上所述，当$-\frac{7}{4}\leqslant a\leqslant\sqrt{3}$函数$f(x)$在区间$(-1,\frac{1}{2})$上单调递增．…6 分

（2）∵$f(x)$有两个极值点x_1，x_2，

∴x_1，x_2是方程$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$的两个根，且函数$f(x)$在区间$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上单调递增，在(x_1,x_2)上单调递减．

∵$g'(x)=f'(x)$∴函数$g(x)$也是在区间$(-\infty,x_1)$和$(x_2,+\infty)$上单调递增，在(x_1,x_2)上单调递减

∵$g(x_0)=f(x_0)-f(x_0)=0$，∴x_0是函数$g(x)$的一个零点．…8 分

由题意知：$x_1+2x_0=3x_2$，$g(x_2)=f(x_2)-f(x_0)$

∵$x_1+2x_0=3x_2$，∴$2x_0-2x_2=x_2-x_1>0$，∴$x_0>x_2$

∴$f(x_2)<f(x_0)$，∴$g(x_2)=f(x_2)-f(x_0)<0$

又$g(x_1)=f(x_1)-f(x_0)=x_1^3+ax_1^2+bx_1-(x_0^3+ax_0^2+bx_0)$

$=(x_1-x_0)(x_1^2+x_1x_0+x_0^2+ax_1+ax_0+b)$

$=(x_1-x_0)\left(x_1^2+x_1\cdot\frac{3x_2-x_1}{2}+\left(\frac{3x_2-x_1}{2}\right)^2+ax_1+a\cdot\frac{3x_2-x_1}{2}+b\right)$

$=(x_1-x_0)(3x_1^2+2ax_1+b+9x_2^2+6ax_2+3b)$----------------12 分

∵x_1，x_2是方程$f'(x)=3x^2+2ax+b=0$的两个根，

∴$3x_1^2+2ax_1+b=0$，$3x_2^2+2ax_2+b=0$…

∴$g(x_1)=f(x_1)-f(x_0)=0$

∵函数$g(x)$图象连续，且在区间$(-\infty,x_1)$上单调递增，在(x_1,x_2)上单调递减，在$(x_2,+\infty)$上单调递增

∴当$x\in(-\infty,x_1)$时，$g(x)<0$，当$x\in(x_1,x_0)$时$g(x)<0$，当$x\in(x_0,+\infty)$时$g(x)>0$，

∴函数$g(x)$有两个零点x_0和x_1．…（16 分）

21．已知矩阵$M=\begin{bmatrix}2&3\\t&1\end{bmatrix}$的一个特征值为 4，求矩阵$M$的逆矩阵$M^{-1}$．

解：矩阵M的特征多项式为$f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-3\\-t&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-1)-3t$；

因为矩阵M的一个特征值为 4，所以方程$f(\lambda)=0$有一根为 4；

即$f(4)=2\times3-3t=0$，解得$t=2$；

所以 $M=\begin{bmatrix}2&3\\2&1\end{bmatrix}$,

设 $M^{-1}=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$,

则 $MM^{-1}=\begin{bmatrix}2a+3c&2b+3d\\2a+c&2b+d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$,

由 $\begin{cases}2a+3c=1\\2a+c=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{4}\\c=\frac{1}{2}\end{cases}$;

由 $\begin{cases}2b+3d=0\\2b+d=1\end{cases}$，解得 $\begin{cases}b=\frac{3}{4}\\d=-\frac{1}{2}\end{cases}$;

所以 $M^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{4}&\frac{3}{4}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$.

[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

22．在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\y=\frac{\sqrt{3}}{2}t+2\end{cases}$（$t$ 为参数），在以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴，且与直角坐标系长度单位相同的极坐标系中，曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=4\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)$.

（1）求直线 l 的普通方程与曲线 C 的直角坐标方程；

（2）若直线 l 与曲线 C 相交于两点 A，B，求线段 AB 的长．

解:(1)已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=\frac{1}{2}t\\y=\frac{\sqrt{3}}{2}t+2\end{cases}$（$t$ 为参数),转换为直角坐标方程为:$\sqrt{3}x-y+2=0$,

曲线 C 的极坐标方程是 $\rho=4\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)$．由 $\rho=4\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4}+\theta)$，得 $\rho^2=4\rho\cos\theta+4\rho\sin\theta$，整理的直角坐标方程为：$x^2+y^2=4x+4y$，

所以曲线 C：$(x-2)^2+(y-2)^2=8$.

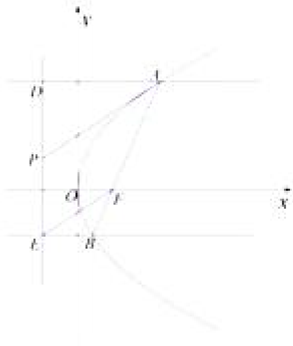
（2）由（1）知圆 C 半径 $r=2\sqrt{2}$，利用圆心到直线的距离 $d=\frac{|2\sqrt{3}-2+2|}{2}=\sqrt{3}$,

所以$AB=2\sqrt{r^2-d^2}=2\sqrt{8-3}=2\sqrt{5}$.

23．如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知抛物线：C：$y^2=2px$（$p>0$）的焦点 F 在直线 $x+y-1=0$ 上，平行于 x 轴的两条直线 l_1，l_2 分别交抛物线线 C 于 A，B 两点，交该抛物线的准线于 D，E 两点．

（1）求抛物线 C 的方程；

（2）若 F 在线段 AB 上，P 是 DE 的中点，证明：$AP\parallel EF$．



解：（1）抛物线 C 的焦点 F 坐标为$(\frac{p}{2}, 0)$，且该点在直线 $x+y-1=0$ 上，

所以$\frac{p}{2}-1=0$，解得 $p=2$，

故所求抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$；

（2）由点 F 在线段 AB 上，

可设直线 l_1，l_2 的方程分别为 $y=a$ 和 $y=b$ 且 $a\neq 0$，$b\neq 0$，$a\neq b$．

则$A(\frac{a^2}{4}, a)$，$B(\frac{b^2}{4}, b)$，D（-1，a），E（-1，b）

∵P 是 DE 的中点，∴$P(-1, \frac{a+b}{2})$

直线 AB 的方程为$y-a=\frac{b-a}{b^2-a^2}(x-\frac{a^2}{4})$，

即 $4x-(a+b)y+ab=0$，

又点 F（1，0）在线段 AB 上，∴$ab=-4$，

$$k_{AP}=\frac{a-\frac{a+b}{2}}{\frac{a^2}{4}+1}=\frac{a+\frac{4}{a}}{\frac{a^2+4}{2}}=\frac{2}{a},$$

$$k_{EF}=\frac{b}{-2}=\frac{-\frac{4}{a}}{-2}=\frac{2}{a}=k_{AP},$$

由于 AP，EF 不重合，所以 $AP /\!/ EF$.

24．在开展学习强国的活动中，某校高三数学教师成立了党员和非党员两个学习组，其中党员学习组有 4 名男教师、1 名女教师，非党员学习组有 2 名男教师、2 名女教师，高三数学组计划从两个学习组中随机各选 2 名教师参加学校的挑战答题比赛.

（1）求选出的 4 名选手中恰好有一名女教师的选派方法数；

（2）记 X 为选出的 4 名选手中女教师的人数，求 X 的概率分布和数学期望.

【解答】角：（1）某校高三数学教师成立了党员和非党员两个学习组，

其中党员学习组有 4 名男教师、1 名女教师，非党员学习组有 2 名男教师、2 名女教师，

高三数学组计划从两个学习组中随机各选 2 名教师参加学校的挑战答题比赛.

选出的 4 名选手中恰好有一名女教师的选派方法数为：

$m=C_4^1C_1^1C_2^2+C_4^2C_2^1C_2^1=28$.

（2）记 X 为选出的 4 名选手中女教师的人数，

则 X 的可能取值为 0，1，2，3，

$P(X=0)=\frac{C_4^2C_2^2}{C_5^2C_4^2}=\frac{6}{60}$,

$P(X=1)=\frac{C_4^1C_1^1C_2^2+C_4^2C_2^1C_2^1}{C_5^2C_4^2}=\frac{28}{60}$,

$P(X=2)=\frac{C_4^1C_1^1C_2^1C_2^1+C_4^2C_2^2}{C_5^2C_4^2}=\frac{22}{60}$,

$P(X=3)=\frac{C_4^1C_1^1C_2^2}{C_5^2C_4^2}=\frac{4}{60}$,

∴X 的概率分布为：

X	0	1	2	3
P	$\frac{6}{60}$	$\frac{28}{60}$	$\frac{22}{60}$	$\frac{4}{60}$

X的数学期望E（X）$=0\times\frac{6}{60}+1\times\frac{28}{60}+2\times\frac{22}{60}+3\times\frac{4}{60}=\frac{7}{5}$.