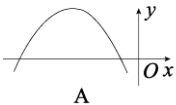
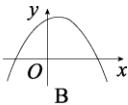
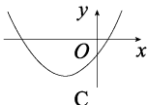
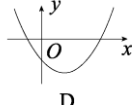


一、单项选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分)

1. 设 a, b 为实数, 则“ $a < \frac{1}{b}$ 或 $b < \frac{1}{a}$ ”是“ $0 < ab < 1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
2. 设 $x \in \mathbb{R}$, 则“ $0 < x < 5$ ”是“ $|x-1| < 1$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
3. 已知 $a_1, a_2 \in (0, 1)$, 记 $M = a_1 a_2$, $N = a_1 + a_2 - 1$, 则 M 与 N 的大小关系是 ()
 A. $M < N$ B. $M > N$ C. $M = N$ D. 不确定
4. 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + 5$ 满足条件 $f(-1) = f(3)$, 则 $f(2)$ 的值为 ()
 A. 5 B. 6 C. 8 D. 与 a, b 的值有关
5. 对任意的 $x \in [-2, 1]$, 不等式 $x^2 + 2x - a \leq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是 ()
 A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 3]$ C. $[0, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$
6. 已知函数 $f(x) = x^2 - 3x + b$ 与 x 轴的正半轴交于点 $(m, 0)$, $(n, 0)$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 ()
 A. $3 + 2\sqrt{2}$ B. $1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$ C. 2 D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$
7. 已知 $abc > 0$, 则二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象可能是 ()
- 



8. 若点 P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的一个动点, 点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 为两个定点, 则 $|PA| + |PB|$ 的最大值为 ()
 A. 2 B. $2\sqrt{2}$ C. 4 D. $4\sqrt{2}$

二、多项选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分)

9. 下列说法不正确的是 ()
- A. 不等式 $(2x-1)(1-x) < 0$ 的解集为 $\left\{x \mid \frac{1}{2} < x < 1\right\}$
- B. 已知 $p: 1 < x < 2$, $q: \log_2(x+1) \geq 1$, 则 p 是 q 的充分不必要条件

C. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则函数 $y = \sqrt{x^2 + 4} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4}}$ 的最小值为 2

D. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, 不等式 $kx^2 - kx + 1 > 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 $(0, 4)$

10. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x - x^2$, 则下列说法正确的有 ()

A. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$

B. $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上是增函数

C. $f(x) > 0$ 的解集为 $(-1, 1)$

D. $f(x) + 2x \geq 0$ 的解集为 $[0, 3]$

11. 下列命题正确的有

()

A. 两个实数 a, b 之间, 有且只有 $a > b$, $a = b$, $a < b$ 三种关系中的一种

B. 一个不等式的两边同加上或同乘以同一个数, 不等号方向不变

C. 一个非零实数越大, 则其倒数就越小

D. 两个数的比值大于 1, 则分子不一定大于分母

12. 已知 a, b, c, d 都是常数, $a > b$, $c > d$. 若 $f(x) = 2019 - (x - a)(x - b)$ 的零点为 c, d ,

则下列不等式正确的是

()

A. $a > c$

B. $b > d$

C. $d > b$

D. $c > a$

三、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分)

13. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C: xy = \sqrt{3}$ 上任意一点 P 到直线 $l: x + \sqrt{3}y = 0$ 的距离的最小值为_____.

14. 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a , 且不等式 $f(x) > 0$ 的解集为 $(1, 2)$, 若函数 $f(x)$ 的最大值小于 1, 则 a 的取值范围是_____.

15. 为了竖一块广告牌, 要制造三角形支架, 要求 $\angle ACB = 60^\circ$, BC 的长度大于 1 米, 且 AC 比 AB 长 0.5 米, 为了稳固广告牌, 要求 AC 越短越好, 设 $BC = x (x > 1)$, $AC = t (t > 0)$, 则 t 关于 x 的表达式为_____, AC 最短为_____.

16. 已知 $ab = \frac{1}{4}$, $a, b \in (0, 1)$, 则 $\frac{1}{1-a} + \frac{2}{1-b}$ 的最小值为_____.

四、解答题(本大题共 4 小题,共 40 分)

17. 若实数 $a \neq 1$, 比较 $a+2$ 与 $\frac{3}{1-a}$ 的大小.

18. 已知 x, y 为正实数, 满足 $1 \leq \lg(xy) \leq 2, 3 \leq \lg \frac{x}{y} \leq 4$, 求 $\lg(x^4 y^2)$ 的取值范围.

19. 已知 $f(x) = -3x^2 + a(6-a)x + 6$.

(1) 解关于 a 的不等式 $f(1) > 0$;

(2) 若不等式 $f(x) > b$ 的解集为 $(-1, 3)$, 求实数 a, b 的值.

20. 函数 $f(x) = x^2 + ax + 3$.

(1) 当 $x \in \mathbb{R}$ 时, $f(x) \geq a$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(2) 当 $x \in [-2, 2]$ 时, $f(x) \geq a$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(3) 当 $a \in [4, 6]$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 x 的取值范围.

一、单项选择题

1 设 a, b 为实数, 则 “ $a < \frac{1}{ba}$ 或 $b < \frac{1}{a}$ ” 是 “ $0 < ab < 1$ ” 的 ()

A. 充分不必要条件

B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 B

解析 可通过举反例说明, 当 $a = b = -10$ 时, $a < \frac{1}{ba}$, $b < \frac{1}{a}$, 但 $ab = 100 > 1$, 所以不是充分条件; $\because 0 < ab < 1$, $\therefore ab$ 同号. ①若 $a > 0$, $b > 0$, $ab < 1 \Rightarrow b < \frac{1}{a}$, ②若 $a < 0$, $b < 0$, 则 $a < 0 < \frac{1}{ab}$, 所以是必要条件. 综上可知 “ $a < \frac{1}{ba}$ 或 $b < \frac{1}{a}$ ” 是 “ $0 < ab < 1$ ” 的必要不充分条件.

2 (2019 天津卷) 设 $x \in \mathbf{R}$, 则 “ $0 < x < 5$ ” 是 “ $|x - 1| < 1$ ” 的 ()

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

答案 B

解析 $|x - 1| < 1$ 等价于 $0 < x < 2$,

故 $0 < x < 5$ 推不出 $|x - 1| < 1$;

由 $|x - 1| < 1$ 能推出 $0 < x < 2$,

故 “ $0 < x < 5$ ” 是 “ $|x - 1| < 1$ ” 的必要不充分条件.

故选 B.

3 已知 $a_1, a_2 \in (0,1)$, 记 $M = a_1 a_2$, $N = a_1 + a_2 - 1$, 则 M 与 N 的大小关系是()

A. $M < N$

B. $M > N$

C. $M = N$

D. 不确定

答案 B

解析 $M - N = a_1 a_2 - (a_1 + a_2 - 1) = a_1 a_2 - a_1 - a_2 + 1 =$

$a_1(a_2 - 1) - (a_2 - 1) = (a_1 - 1)(a_2 - 1)$,

又因为 $a_1 \in (0,1)$, $a_2 \in (0,1)$, 所以 $a_1 - 1 < 0$, $a_2 - 1 < 0$. 所以 $(a_1 - 1)(a_2 - 1) > 0$, 即 $M - N > 0$, 所以 $M > N$.

4 二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + 5$ 满足条件 $f(-1) =$

$f(3)$, 则 $f(2)$ 的值为()

A. 5

B. 6

C. 8

D. 与 a, b 的值有关

答案 A

解析 因为函数 $f(x) = ax^2 + bx + 5$ 满足条件 $f(-1) =$

$f(3)$, 所以 $f(x) = ax^2 + bx + 5$ 的图象关于 $x = \frac{-1+3}{2} = 1$ 对称, 则 $f(2) = f(0) = 5$. 故选 A.

5 对任意的 $x \in [-2,1]$, 不等式 $x^2 + 2x - a \leq 0$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围是()

A. $(-\infty, 0]$

B. $(-\infty, 3]$

C. $[0, +\infty)$

D. $[3, +\infty)$

答案 D

解析 设 $f(x) = x^2 + 2x - a (x \in [-2,1])$, 其对称轴为 $x = -1$, 所以当 $x = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 $3 - a$, 所以 $3 - a \leq 0$, 解得 $a \geq 3$. 故选 D.

6 已知函数 $f(x) = x^2 - 3x + b$ 与 x 轴的正半轴交于点 $(m,0)$, $(n,0)$, 则 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为()

A. $3 + 2\sqrt{2}$

B. $1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$

C. 2 D. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$

答案 B

解析 由题意得 $m + n = 3$, 且 $m > 0$, $n > 0$,

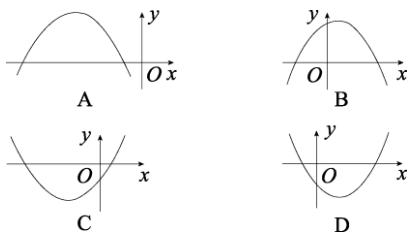
所以 $\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right)(m+n) = 3 + \frac{n}{m} + \frac{2m}{n} \geq 3 + 2\sqrt{2}$,

即 $\left(\frac{1}{m} + \frac{2}{n}\right) \geq 1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 当且仅当 $\begin{cases} m+n=3, \\ n=\sqrt{2}m, \end{cases}$

即 $m=3\sqrt{2}-3$, $n=6-3\sqrt{2}$ 时等号成立.

所以 $\frac{1}{m} + \frac{2}{n}$ 的最小值为 $1 + \frac{2\sqrt{2}}{3}$. 故选 B.

7 已知 $abc > 0$, 则二次函数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 的图象可能是()



答案 D

解析 A 项, 因为 $a < 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$, 所以 $b < 0$, 又因为 $abc > 0$, 所以 $c > 0$, 而 $f(0) = c < 0$, 故 A 项错

误; B 项, 因为 $a < 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$, 所以 $b > 0$, 又因为 $abc > 0$, 所以 $c < 0$, 而 $f(0) = c > 0$, 故 B 项错误;

C 项, 因为 $a > 0$, $-\frac{b}{2a} < 0$, 所以 $b > 0$, 又因为 $abc > 0$, 所以 $c > 0$, 而 $f(0) = c < 0$, 故 C 项错误; D 项,

因为 $a > 0$, $-\frac{b}{2a} > 0$, 所以 $b < 0$, 因为 $abc > 0$, 所以 $c < 0$, 而 $f(0) = c < 0$, 故 D 项正确.

8 (2020 山西模拟) 若点 P 为圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的一个动点, 点 $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$ 为两个定点,

则 $|PA| +$

$|PB|$ 的最大值为()

A . 2

B . $2\sqrt{2}$

C . 4

D . $4\sqrt{2}$

答案 B

解析 依题意 $\angle APB = 90^\circ$, 所以 $|PA|^2 + |PB|^2 = 4$, 由基本不等式可得 $\left(\frac{|PA| + |PB|}{2}\right)^2 \leq \frac{|PA|^2 + |PB|^2}{2} =$

2, 所以 $|PA| + |PB| \leq 2\sqrt{2}$. 当且仅当 $|PA| = |PB| = \sqrt{2}$ 时取等号, 故选 B.

二、多项选择题

9 下列说法不正确的是()

A. 不等式 $(2x-1)(1-x) < 0$ 的解集为 $\{x | \frac{1}{2} < x < 1\}$

B. 已知 $p: 1 < x < 2$, $q: \log_2(x+1) \geq 1$, 则 p 是 q 的充分不必要条件

C. 若 $x \in \mathbf{R}$, 则函数 $y = \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}$ 的最小值为 2

D. 当 $x \in \mathbf{R}$ 时, 不等式 $kx^2 - kx + 1 > 0$ 恒成立, 则 k 的取值范围是 $(0, 4)$

答案 ACD

解析 对 A: 由 $(2x-1)(1-x) < 0$ 可得 $(2x-1)(x-1) > 0$, 所以 $x < \frac{1}{2}$ 或 $x > 1$, 所以 A 错误.

对 B: 由 $\log_2(x+1) \geq 1$ 可得 $x+1 \geq 2$, 所以 $x \geq 1$,

所以 $p: 1 < x < 2$ 是 $q: \log_2(x+1) \geq 1$ 的充分不必要条件.

对 C: 由 $y = \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \geq 2$,

当且仅当 $x^2+4=1$ 时取等号,

但是 $x^2+4 \geq 4$,

所以 $y = \sqrt{x^2+4} + \frac{1}{\sqrt{x^2+4}} \geq 4 + \frac{1}{4} = \frac{17}{4}$,

所以 C 错误.

对 D: 若当 $x \in \mathbf{R}$ 时, 不等式 $kx^2 - kx + 1 > 0$ 恒成立,

①当 $k=0$ 时, 不等式为 $1 > 0$ 恒成立, 满足题意;

②当 $k \neq 0$ 时, 只要 $\begin{cases} k > 0, \\ \Delta = k^2 - 4k < 0, \end{cases}$ 解得 $0 < k < 4$;

所以不等式 $kx^2 - kx + 1 > 0$ 的解集为 $\mathbf{R}$, 则实数 k 的取值范围为 $[0, 4)$, 所以 D 错误. 故选 ACD.

10 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x - x^2$, 则下列说法正确的有()

A. $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$

B. $f(x)$ 在 $(-1, 0)$ 上是增函数

C. $f(x) > 0$ 的解集为 $(-1, 1)$

D. $f(x) + 2x \geq 0$ 的解集为 $[0, 3]$

答案 AD

解析 因为 $x < 0$ 时, $-x > 0$, 所以 $f(-x) = -x - x^2$,

又因为 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的偶函数, $f(-x) = f(x)$,

所以 $f(x) = -x^2 - x$,

$$\text{所以 } f(x) = \begin{cases} -x^2 + x, & x \geq 0, \\ -x^2 - x, & x < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, & x \geq 0, \\ -\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}, & x < 0, \end{cases}$$

所以 $f(x)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$, 故 A 正确;

$f(x)$ 在 $\left(-1, -\frac{1}{2}\right)$ 上为增函数, 故 B 错误;

$f(x) > 0$ 的解集为 $(-1, 0) \cup (0, 1)$, 故 C 错误;

$f(x) + 2x \geq 0$, 即 $x \geq 0$ 时, $-x^2 + x + 2x \geq 0$, 解得 $0 \leq x \leq 3$, 而 $x < 0$ 时, $-x^2 - x + 2x \geq 0$ 的解集为空集, 故 D 正确, 故选 AD.

11 下列命题正确的有()

A. 两个实数 a, b 之间, 有且只有 $a > b, a = b, a < b$ 三种关系中的一种

B. 一个不等式的两边同加上或同乘以同一个数, 不等号方向不变

C. 一个非零实数越大, 则其倒数就越小

D. 两个数的比值大于 1, 则分子不一定大于分母

答案 AD

解析 A 正确. 两个实数 a, b 之间的大小关系只有三种之一.

B 错误. 同乘以一个负数或 0 时, 不等号改变.

C 错误. 如 $-2 < 2$, 而 $-\frac{1}{2} < \frac{1}{2}$.

D 正确. 当这个比值中的分母小于零时, 分子小于分母, 当这个比值中的分母大于零时, 分子大于分母.

12 (2020 襄阳模拟) 已知 a, b, c, d 都是常数, $a > b, c > d$. 若 $f(x) = 2019 - (x - a)(x - b)$ 的零点为 c, d , 则下列不等式正确的是()

A. $a > c$

B. $b > d$

C. $d > b$

D. $c > a$

答案 BD

解析 因为 $f(x)=2\,019-(x-a)(x-b)$, 所以 $f(a)=$

$f(b)=2\,019$, c, d 为函数 $f(x)$ 的零点, 且 $a>b, c>d$, 所以可在平面直角坐标系中作出函数 $y=(x-a)(x-b)$ 的大致图象, 如图 2.4 1 所示, 由图可知 $c>a>b>d$. 故选 BD.

图 2.4 1

三、填空题

13 (2020 苏北四市模拟) 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 $C:xy=\sqrt{3}$ 上任意一点 P 到直线 $l:x+\sqrt{3}y=0$ 的距离的最小值为_____.

答案 $\sqrt{3}$

解析 设 $P(a, b)$, 有 $ab=\sqrt{3}$, 则 $d_{P-l}=\frac{|a+\sqrt{3}b|}{\sqrt{1+3}}\geq\frac{2\sqrt{\sqrt{3}ab}}{2}=\sqrt{3}$, 当且仅当 $a=\sqrt{3}b$,

即 $\begin{cases} a=\sqrt{3}, \\ b=1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-\sqrt{3}, \\ b=-1 \end{cases}$ 时取到等号.

14 已知二次函数 $f(x)$ 的二次项系数为 a , 且不等式

$f(x)>0$ 的解集为 $(1, 2)$, 若函数 $f(x)$ 的最大值小于 1, 则 a 的取值范围是_____.

答案 $(-4, 0)$

解析 由题意知 $a<0$, 可设 $f(x)=a(x-1)(x-2)=ax^2-3ax+2a$, 所以 $f(x)_{\max}=f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{a}{4}<1$,

所以 $a>-4$, 故 $-4<a<0$.

15 如图 2.4 2 所示, 为了竖一块广告牌, 要制造三角形支架, 要求 $\angle ACB=60^\circ$, BC 的长度大于 1 米, 且 AC 比 AB 长 0.5 米, 为了稳固广告牌, 要求 AC 越短越好, 设 $BC=x(x>1)$, $AC=t(t>0)$, 则 t 关于 x 的表达式为_____, AC 最短为_____.

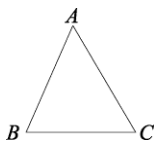


图 2.4 2

答案 $t=\frac{x^2-0.25}{x-1}(x>1)$ $2+\sqrt{3}$

解析 由题意得 $AB=AC-0.5=t-0.5$, 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理得 $AB^2=AC^2+BC^2-2AC \cdot BC \cos 60^\circ$, 即 $(t-0.5)^2=t^2+x^2-tx$, 化简并整理得 $t=\frac{x^2-0.25}{x-1}(x>1)$,

即 $t = x - 1 + \frac{0.75}{x-1} + 2 \geq 2 + \sqrt{3}$

(当且仅当 $x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$ 时, 等号成立),

此时 t 取最小值 $2 + \sqrt{3}$.

16 已知 $ab = \frac{1}{4}$, $a, b \in (0, 1)$, 则 $\frac{1}{1-a} + \frac{2}{1-b}$ 的最小值为_____.

答案 $4 + \frac{4\sqrt{2}}{3}$

解析 $\because ab = \frac{1}{4}, \therefore a = \frac{1}{4b}, \because a, b \in (0, 1), \therefore \frac{1}{4} < b < 1,$

$$\therefore \frac{1}{1-a} + \frac{2}{1-b} = \frac{1}{1-\frac{1}{4b}} + \frac{2}{1-b} = \frac{4b}{4b-1} + \frac{2}{1-b}$$

$$= 1 + \frac{1}{4b-1} + \frac{8}{4-4b}.$$

$$\text{而 } \frac{1}{4b-1} + \frac{8}{4-4b} = \frac{1}{3} [(4b-1) + (4-4b)] \left(\frac{1}{4b-1} + \frac{8}{4-4b} \right) = \frac{1}{3} \left[9 + \frac{4-4b}{4b-1} + \frac{8(4b-1)}{4-4b} \right] \geq \frac{1}{3} (9 +$$

$$2\sqrt{8}) = 3 + \frac{4\sqrt{2}}{3}. \text{ 当且仅当 } 4(1-b) = 2\sqrt{2}(4b-1), \text{ 即 } b = \frac{2\sqrt{2}+2}{14} \text{ 时取等号.}$$

$$\therefore \text{原式} \geq 4 + \frac{4\sqrt{2}}{3}, \therefore \frac{1}{1-a} + \frac{2}{1-b} \text{ 的最小值为 } 4 + \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

四、解答题

17 若实数 $a \neq 1$, 比较 $a+2$ 与 $\frac{3}{1-a}$ 的大小.

答案 当 $a > 1$ 时, $a+2 > \frac{3}{1-a}$; 当 $a < 1$ 时, $a+2 < \frac{3}{1-a}$

解析 因为 $a+2 - \frac{3}{1-a} = \frac{-a^2-a-1}{1-a} = \frac{a^2+a+1}{a-1}$, 所以当 $a > 1$ 时, $a+2 > \frac{3}{1-a}$; 当 $a < 1$ 时, a

$$+2 < \frac{3}{1-a}.$$

18 已知 x, y 为正实数, 满足 $1 \leq \lg(xy) \leq 2, 3 \leq \lg \frac{x}{y} \leq 4$, 求 $\lg(x^4y^2)$ 的取值范围.

答案 $[6, 10]$

解析 设 $a = \lg x, b = \lg y$, 则 $\lg(xy) = a+b, \lg \frac{x}{y} = a-b$,

$$\lg(x^4y^2)=4a+2b. \text{ 设 } 4a+2b=m(a+b)+n(a-b), \text{ 所以 } \begin{cases} m+n=4, \\ m-n=2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} m=3, \\ n=1. \end{cases} \text{ 所以 } \lg(x^4y^2)$$

=

$$3\lg(xy)+\lg\frac{x}{y}. \text{ 因为 } 3\leq 3\lg(xy)\leq 6, 3\leq \lg\frac{x}{y}\leq 4,$$

$$\text{所以 } 6\leq \lg(x^4y^2)\leq 10,$$

$$\text{即 } \lg(x^4y^2) \text{ 的取值范围是 } [6, 10].$$

$$\boxed{19} \text{ 已知 } f(x) = -3x^2 + a(6-a)x + 6.$$

$$(1) \text{ 解关于 } a \text{ 的不等式 } f(1) > 0;$$

$$(2) \text{ 若不等式 } f(x) > b \text{ 的解集为 } (-1, 3), \text{ 求实数 } a, b \text{ 的值.}$$

$$\boxed{\text{答案}} (1) \{a | 3 - 2\sqrt{3} < a < 3 + 2\sqrt{3}\} \quad (2) \begin{cases} a = 3 \pm \sqrt{3}, \\ b = -3. \end{cases}$$

$$\boxed{\text{解析}} (1) \text{ 由题意知 } f(1) = -3 + a(6-a) + 6 = -a^2 + 6a + 3 > 0, \text{ 即 } a^2 - 6a - 3 < 0, \text{ 解得 } 3 - 2\sqrt{3} < a < 3 + 2\sqrt{3}. \text{ 所以不等式的解集为 } \{a | 3 - 2\sqrt{3} < a < 3 + 2\sqrt{3}\}.$$

$$(2) \text{ 因为 } f(x) > b \text{ 的解集为 } (-1, 3),$$

$$\text{所以方程 } -3x^2 + a(6-a)x + 6 - b = 0 \text{ 的两根为 } -1, 3, \text{ 所以 } \begin{cases} (-1) + 3 = \frac{a(6-a)}{3}, \\ (-1) \times 3 = -\frac{6-b}{3}, \end{cases} \text{ 解得}$$

$$\begin{cases} a = 3 \pm \sqrt{3}, \\ b = -3. \end{cases}$$

$$\boxed{20} \text{ 函数 } f(x) = x^2 + ax + 3.$$

$$(1) \text{ 当 } x \in \mathbf{R} \text{ 时, } f(x) \geq a \text{ 恒成立, 求 } a \text{ 的取值范围;}$$

$$(2) \text{ 当 } x \in [-2, 2] \text{ 时, } f(x) \geq a \text{ 恒成立, 求 } a \text{ 的取值范围;}$$

$$(3) \text{ 当 } a \in [4, 6] \text{ 时, } f(x) \geq 0 \text{ 恒成立, 求 } x \text{ 的取值范围.}$$

$$\boxed{\text{答案}} (1) [-6, 2] \quad (2) [-7, 2] \quad (3) (-\infty, -3 - \sqrt{6}] \cup [-3 + \sqrt{6}, +\infty)$$

$$\boxed{\text{解析}} (1) \text{ 因为 } x \in \mathbf{R} \text{ 时, 有 } x^2 + ax + 3 - a \geq 0 \text{ 恒成立, 需 } \Delta = a^2 - 4(3-a) \leq 0, \text{ 所以 } -6 \leq a \leq 2, \text{ 故 } a \text{ 的取值范围为 } [-6, 2].$$

$$(2) \text{ 当 } x \in [-2, 2] \text{ 时, 设 } g(x) = x^2 + ax + 3 - a \geq 0, \text{ 分如下三种情况讨论(如图 2.4-3 所示):}$$

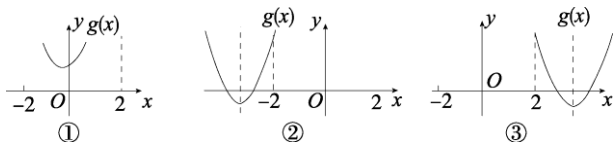


图 2.4.3

①如图①, 当 $g(x)$ 的图象恒在 x 轴上方或与 x 轴有两个相同交点时, 满足条件, 有 $\Delta = a^2 - 4(3 - a) \leq 0$, 即 $-6 \leq a \leq 2$.

②如图②, $g(x)$ 的图象与 x 轴有 2 个交点,

但在 $x \in [-2, +\infty)$ 时, $g(x) \geq 0$,

$$\begin{cases} \Delta > 0, \\ x = -\frac{a}{2} < -2, \\ g(-2) \geq 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} a^2 - 4(3 - a) > 0, \\ -\frac{a}{2} < -2, \\ 4 - 2a + 3 - a \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > 2 \text{ 或 } a < -6, \\ a > 4, \\ a \leq \frac{7}{3}, \end{cases} \quad \text{解得 } a \in \emptyset.$$

③如图③, $g(x)$ 的图象与 x 轴有 2 个交点,

$$\text{但在 } x \in (-\infty, 2] \text{ 时, } g(x) \geq 0, \quad \text{即} \quad \begin{cases} \Delta > 0, \\ x = -\frac{a}{2} > 2, \\ g(2) \geq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 4(3 - a) > 0, \\ -\frac{a}{2} > 2, \\ 7 + a \geq 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a > 2 \text{ 或 } a < -6, \\ a < -4, \\ a \geq -7, \end{cases}$$

所以 $-7 \leq a < -6$.

综上, 得 $-7 \leq a \leq 2$, 即 a 的取值范围是 $[-7, 2]$.

(3) 令 $h(a) = xa + x^2 + 3$, 当 $a \in [4, 6]$ 时,

$h(a) \geq 0$ 恒成立.

$$\text{只需} \begin{cases} h(4) \geq 0, \\ h(6) \geq 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x^2 + 4x + 3 \geq 0, \\ x^2 + 6x + 3 \geq 0, \end{cases}$$

解得 $x \leq -3 - \sqrt{6}$ 或 $x \geq -3 + \sqrt{6}$,

故 x 的取值范围是 $(-\infty, -3 - \sqrt{6}] \cup [-3 + \sqrt{6}, +\infty)$.