# 数学抽象视角下的高中数学教材内容分析
## ——以《三角函数》一章为例

徐恩佳 （浙江师范大学教师教育学院 321004）

“数学在本质上研究的是抽象的东西，数学的发展所依赖的最重要的基本思想也就是抽象”.[1] 数学抽象反映了数学的本质特征，是形成理性思维的重要基础，它包括从数量与数量关系、图形与图形关系中抽象出数学概念及概念之间的联系，以及从事物与事物之间的联系、事物内部要素之间的联系中抽象出一般规律和结构，并用数学语言加以表征.[2] 数学抽象同时也作为数学学科六大核心素养之一，占据着十分重要的地位.《普通高中数学课程标准(2017 年版)》(下文简称《新课标》)中指出教材编写应“在数学内容的表述中体现数学学科核心素养，编写出数学内容与数学学科核心素养融为一体的教材.”[3] 数学教材是实现数学课程目标的重要教学资源，也是培养数学抽象素养的重要载体.基于此，本文将着眼于数学抽象素养，对依据《新课标》编写的人教 A 版高中数学新教材中《三角函数》这一章节内容展开分析，探讨相关教材内容与数学抽象的吻合性，以期能为教材编写落实核心素养及培养学生数学抽象素养提供借鉴与启示.

## 1 研究设计

### 1.1 研究对象

函数是用数学的语言和工具来描述客观世界中的变量关系和规律，因此函数具有典型的抽象性特征.本研究选取函数主线下的必修一第五章《三角函数》，对相关教材内容进行具体分析.《新课标》中对三角函数这一章节的内容要求是：“借助单位圆建立一般三角函数的概念，体会引入弧度制的必要性……利用三角函数构建数学模型，解决实际问题.”本章结构框架如图 1 所示.

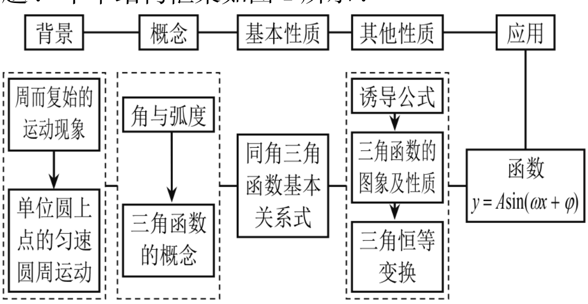


图 1 三角函数教材内容结构图

### 1.2 分析思路

《新课标》指出数学抽象素养主要有四种表现形式：获得数学概念和规则、提出数学命题和模型、形成数学方法与思想和认识数学结构与体系.朱立明在学科核心素养测评指标构建中提出数学抽象具有概念获取、符号表征、通性通法创造、特征概括等形式[4].骆洪才等人认为数学抽象的主要表现形式有层次性、模型化、理想化、形式化和符号化等.其中“模型化”具体表现在两个方面：一是数学内容模型化的结果，通过经历对实际问题简约化和数学化的抽象过程，提取共同信息和本质特征，从而提炼、概括、形成形式化的数学结构，也即数学模型；二是数学模型的可迁移性，即利用该模型进行一般化的实践应用，在应用的过程中进一步加深对数学知识的理解，感知其本质特征，以达到灵活运用的水平.“理想化”就是运用思维抽象的力量创造出理想的客体，如数学中所理解的点、线、面就是理想化的基本概念，在现实生活中是找不到的，这是一种更为深刻和高层次的抽象表现.[5] 结合上述内容并借鉴有关分析框架，本研究将以获得数学概念和形式、数学模型化与理想化、认识数学结构与体系和形成数学方法与思想 4 个方面作为教材内容的分析维度[6].

## 2 教材内容分析结果

### 2.1 获得数学概念和形式

数学概念是抽象的重要产物之一，且概念知识本质的提取过程也反映了数学抽象逻辑性、层次性的发展过程.史宁中将数学抽象划分为三个阶段：一是简约阶段，即把握事物的本质，把繁杂问题简单化表达；二是符号阶段，即去掉具体的内容，利用概念、图形、符号、关系表述包括已经简约化了的事物在内的一类事物；三是普适阶段，即通过假设和推理建立法则、模式或者模型，并能够在一般的意义上解释具体事物.[1] 在教材的章引言部分，介绍了许多现实生活中周而复始的运动变化现象，使学生体会圆周运动的现实背景.进一步引到单位圆上点 $P$ 的圆周运动，给出任意角和弧度制等预备知识.接下来是三角函数概念形成的抽象过程，具体如下：

• 简约阶段

为表示点 $P$ 的位置变化情况，以单位圆的圆心 $O$ 为原点，以射线 $OA$ 为 $x$ 轴的非负半轴，建立直角坐标系(图 2)，射线 $OA$ 从 $x$ 轴的非负半轴开始，绕点 $O$ 按逆时针方向旋转角 $\alpha$，终止位置为 $OP$.这一

阶段是从真实的情境转化为抽象的数学情境,是数学抽象过程的第一步也是最重要的一步,其关键在于将单位圆置于直角坐标系之中.这不仅以简驭繁,抓住了数学对象的本质,并且也为进一步的研究打下基础.

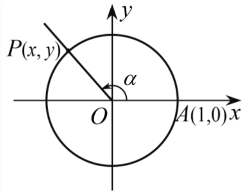

图 2

· 符号阶段

首先是对一些特殊角度下点 $P$ 坐标的计算与探究,如当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$,$\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $\alpha=\frac{2\pi}{3}$ 时点 $P$ 坐标的确定,进而考虑一般化情况.通过运动过程涉及的量及其关系的分析,得出点 $P$ 的横、纵坐标随角 $\alpha$ 的变化而变化的规律.在这一阶段中借助坐标、利用符号和关系等表述事物内在的联系.

· 普适阶段

基于上述内容,发现任意给定一角 $\alpha$,其终边 $OP$ 与单位圆的交点 $P$ 的坐标都能被唯一确定,根据函数的定义可得点 $P$ 的横坐标 $x$、纵坐标 $y$ 都是角 $\alpha$ 的函数.于是把点 $P$ 的纵坐标 $y$ 叫作 $\alpha$ 的正弦函数(sine function),记作 $\sin\alpha$,即 $y=\sin\alpha$;相应地可得到余弦函数和正切函数的严格定义.在三角函数定义形式化阶段,借助前面所学的用 $y=\log_a x(x>0)$ 表示对应关系的经验,理解利用 $y=\sin x$,$y=\cos x$,$y=\tan x\left(x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbf{Z}\right)$ 等形式进行表达的基本含义.

## 2.2　数学模型化与理想化

教材中的“数学模型化和理想化”包括数学结构或模型形成的抽象过程和数学模型的迁移应用两个方面.针对三角函数概念的形成,教材设置了三个探究活动让学生经历完整的抽象过程,以获得数学模型[7].具体如下:

如图 5.2-1,单位圆上的点 $P$ 以 $A$ 为起点做逆时针方向旋转,建立一个数学模型,刻画点 $P$ 的位置变化情况.

探究 1:当 $\alpha=\frac{\pi}{6}$ 时,点 $P$ 的坐标是什么? 当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ 时,点 $P$ 的坐标又是什么? 它们是唯一确定的吗?

探究 2:一般地,任意给定一个角 $\alpha$,它的终边 $OP$ 与单位圆交点 $P$ 的坐标能唯一确定吗?

探究 3:在初中我们学了锐角三角函数,知道它们都是以锐角为自变量,以比值为函数值的函数,设 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,把按锐角三角函数定义求得的锐角 $x$ 的正弦记为 $z_1$,并把按本节三角函数定义求得的 $x$ 的正弦记为 $y_1$,$z_1$ 与 $y_1$ 相等吗? 对于余弦、正切也有相同的结论吗?

引入部分是将具体实例转化为抽象情境,即利用直角坐标系探究圆周运动中点的位置变化情况,并通过探究 1、2 的计算结果及分析概括最终得到三角函数的严格定义和形式化表达.这样就形成了“具体实例 — 共同特征 — 概念符号 — 性质与应用”的基本模式[8].而设置探究 3 的目的是为了与已有知识进行联系与区别,以丰富和深化三角函数的概念.教材先利用单位圆上点的坐标定义任意角的三角函数,再与初中所学的锐角三角函数进行异同点比较,其目的在于明确两者虽然在计算结果上保持一致,但并不是简单的拓展与延伸的关系,其本质差别在于初中所学习的锐角三角函数属于“几何量定义法”,它所讨论的是三角形各种几何量之间的函数关系;而任意角的三角函数属于“坐标定义法”,它是研究现实中的周期现象而发展起来的一个周期函数[9].

在三角函数的应用部分,以我国古代发明的水利灌溉工具筒车为背景,从实际问题出发,利用筒车运动规律建立形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的三角函数模型.该数学模型具有可迁移性,既可解决理想化的周期运动变化一类问题,如摩天轮、简谐运动、交变电流问题等,也可用于近似地表示温度变化、潮起潮落等现实生活中的周期变化特点.

## 2.3　认识数学结构与体系

从整体上来看,在学习三角函数一章之前所学的是函数的概念与性质以及指数函数、对数函数,这样集中安排函数内容学习有利于函数学习经验的运用、函数知识的系统构建;从章节内部来看,教材是按照“背景 — 概念 — 性质 — 应用”的逻辑呈现,通过波动、简谐振动等典型而丰富的周而复始的运动变化进行引入,让学生感知周期变化的普遍存在,以说明研究三角函数的必要性,这是“来龙”;将抽象的知识运用到实际生活中以解决周期运动一类的问题,这是“去脉”,同时三角函数也是后续研究几何问题的重要工具.这样的编排方式有利于形成数学知识纵向和横向的完整结构,既符合学科知识逻辑,又关注到了学生的心理发展,与学生能力发展的渐进性和持续性相一致,有利于学生在知识学习的过程中抽象出基本规律和一般方法,明白知识的来龙去脉,构建完整的知识结构体系.

## 2.4　形成数学方法与思想

数学方法与思想的形成既是抽象的重要产物,又有助于对抽象过程的理解,两者是相辅相成的.在三角函数定义形成的过程中体现了抽象与概括、特殊与一般、对应等思想;在利用“单位圆”这一脚手架推导三角函数图象与性质的过程中体现了数形结合、对称性与不变性的思想.教材在呈现三角函数性

质时，是从概念中要素的关系、概念间的联系到与其他知识的联系，循序渐进的编排方式有助于学生自然地理解借助几何直观、从特殊到一般的基本过程；且在三角函数公式的推导和证明中都用到了单位圆，反复利用的目的在于形成一般化的研究路径和研究方法，使学生体会理解基本的知识形成过程及蕴含的数学思想，学会发现、创造的方法和着眼点，培养锻炼应用的能力、逻辑推理的能力、想办法的能力.[10] 在函数模型 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的应用中也渗透了建模的思想方法.

## 3 思考与建议

从数学抽象的 4 种表现形式对三角函数一章的内容具体分析后发现，教材较好地落实了《新课标》对数学抽象素养的要求.主要集中体现在：设置逐级抽象的数学活动内容以使学生在探究之中获得数学概念及简约化、一般化的形式表征；整体性的编排将单元内部各元素间、外部单元间等有机联结，有利于构建有逻辑的完整知识样态.但教材仍有改进之处：其一，数学模型的应用问题仍是以数学情境为主，需加强与其他知识、学科和社会生活之间的关联；其二，教材在传递数学方法与思想的基础上，对于提供锻炼和发展数学探究、迁移创新能力的机会需进一步加强，如增加不同难易程度的综合性实践活动或结构不良、答案不唯一的开放性习题等.基于上述分析，下面针对教材内容也给出相应的培养数学抽象素养的教学建议.

### 3.1 深化数学概念认知以涵育抽象思维素养

抽象和概括是获得数学概念的主要思维方式，概念教学则是培育数学抽象素养的重要路径.数学概念的学习包括观察客观现象并提出研究问题，通过比较、概括等方式提取事物的本质特征，在抽象形成必要的概念基础之上探索事物的内在规律，应用定理、性质等解决问题；在此基础上，应着力深化学生对概念内涵与知识意义的认知，促使概念知识和思维能力进一步升华为抽象思维素养.[11] 因此，在教学设计上，主题式单元课程设计一方面可以体现概念学习的基本路径，促进学生对概念的全方面认识，形成完整的概念知识脉络；另一方面，也可促进学生基本经验的形成与积累，包括概念学习的必要经验以及数学抽象过程的基本活动经验.

### 3.2 丰富模型应用情境以提升抽象概括能力

基于数学抽象素养的教学应重视情境的创设和问题的提出，因为设计情境和提出问题的目的是启发学生思考，引导学生有效参与数学活动，促使学生理解数学内容本质.在课堂教学中，除了提供数学情境以及教材所给的问题情境外，可以设计与学生生活经验相吻合的个人情境、反映时代气息的社会情境以及与其他学科融合的科学情境下的问题等，以丰富学生的模型应用经验，提高灵活应用的水平；也可考虑设置相互之间具有联系、相互统领的问题情境背景以增强内容间的关联性.在实践中，学生需要将新情境、新问题与已学知识相联系，将实际问题抽象成数学模型后加以解决.在这个过程中，学生的抽象概括能力能得到充分锻炼，也可进一步培养其综合应用、实践探究的能力.

### 3.3 训练抽象思维以发展探究意识和创新精神

近年来高考日益重视对学生数学学科思维的考查，探究性问题成为常见的考查方式之一，其主要目的在于检验学生能否在问题解决中抓住所用方法的本质，进行拓展延伸，从而有所创新.探究性问题的解决能有效地训练学生的抽象思维，因为综合利用所学知识和技能对不同情境下的复杂问题进行概括探究的过程，也是抽象思维不断强化的过程.在探究活动中充分思考、合理设问、主动探索，能激活学生的创新意识和创新精神.数学思想方法是数学的灵魂，是形成良好认知结构的纽带，也有助于创造能力的形成.教师在传递数学思想方法、培养学生理性思维的基础上，还需进一步提供创造性、开放性的探究学习机会以提高学生思维的创新性和灵活性.

## 参考文献

[1] 史宁中.数学思想概论(第 1 辑)：数量与数量关系的抽象[M].长春：东北师范大学出版社，2008：3.

[2] 李昌官.数学抽象及其教学[J].数学教育学报，2017，26(4)：61-64.

[3] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017 年版)[M].北京：人民教育出版社，2018.

[4] 朱立明.高中生数学学科核心素养测评指标体系的构建[J].教育科学，2020，36(4)：29-37.

[5] 骆洪才，廖六生.数学抽象性的研究与思考[J].数学教育学报，2001(2)：6-8，20.

[6] 张辉蓉，王晓杰，宋美臻.我国数学抽象研究及反思——基于 1958 年至 2016 年文献计量的分析[J].课程·教材·教法，2017，37(9)：79-84.

[7] 徐建新，陈丽真.两个课标人教版教材中《三角函数的概念》内容的比较研究[J].福建中学数学，2020(8)：20-23.

[8] 邓翰香，吴立宝，沈婕.指向数学抽象素养的教材分析框架与案例剖析——以人教 A 版“函数单调性”为例[J].数学通报，2019，58(10)：33-38.

[9] 章建跃.为什么用单位圆上点的坐标定义任意角的三角函数[J].数学通报，2007(1)：15-18.

[10] 章建跃.数学抽象：从背景到概念再到结构——兼谈人教 A 版教材的数学问题创新设计[J].中国数学教育，2019(24)：8-15.

[11] 王钦敏，余明芳.数学思维素养深度涵育：教学的进路与方略[J].数学教育学报，2020，29(6)：56-60.