

高一数学期末复习综合练习 6

班级_____ 姓名_____ 学号_____ 成绩_____

一、单项选择题：

1. 若角 α 的终边经过点 $P(3, a)(a \neq 0)$, 则()
A. $\sin \alpha > 0$ B. $\sin \alpha < 0$ C. $\cos \alpha > 0$ D. $\cos \alpha < 0$
2. 记函数 $y = \sqrt{4 - x^2}$ 的定义域为 A , 函数 $y = \ln(x - 1)$ 的定义域为 B , 则 $A \cap B =$ ()
A. $(1, 2)$ B. $(1, 2]$ C. $(-2, 1)$ D. $[-2, 1)$
3. 设实数 x 满足 $x > 0$, 函数 $y = 2 + 3x + \frac{4}{x+1}$ 的最小值为()
A. $4\sqrt{3} - 1$ B. $4\sqrt{3} + 2$ C. $4\sqrt{2} + 1$ D. 6
4. 已知 a, b, m 都是负数, 且 $a < b$, 则()
A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$ C. $a + m > b + m$ D. $\frac{b+m}{a+m} > \frac{b}{a}$
5. 有一组实验数据如下表所示:

t	1.9	3.0	4.0	5.1	6.1
v	1.5	4.0	7.5	12.0	18.0

现准备用下列函数中的一个近似地表示这些数据满足的规律, 其中最接近的一个是()

- A. $v = 2t - 2$ B. $v = \frac{t^2 - 1}{2}$ C. $v = \log_{0.5} t$ D. $v = \log_3 t$
6. 若函数 $f(x)$ 同时满足: ①定义域内存在实数 x , 使得 $f(x) \cdot f(-x) < 0$; ②对于定义域内任意 x_1, x_2 , 当 $x_1 \neq x_2$ 时, 恒有 $(x_1 - x_2) \cdot [f(x_1) - f(x_2)] > 0$; 则称函数 $f(x)$ 为“DM 函数”. 下列函数中是“DM 函数”的为()
A. $f(x) = x^3$ B. $f(x) = \sin x$ C. $f(x) = e^{x-1}$ D. $f(x) = \ln x$

二、多项选择题：

7. 关于函数 $f(x) = \tan 2x$, 下列说法中正确的是()
A. 最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$ B. 图象关于点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称
C. 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称 D. 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增
8. 已知曲线 $C_1: y = \sin x$, $C_2: y = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$, 下列说法中正确的是 ()
A. 把 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将所有点的横坐标变为原来的 2 倍, 得到 C_2
B. 把 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 得到 C_2
C. 把 C_1 上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到 C_2
D. 把 C_1 上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 C_2

9. 我们知道, 如果集合 $A \subseteq S$, 那么 S 的子集 A 的补集为 $\complement_S A = \{x | x \in S, \text{ 且 } x \notin A\}$. 类似地, 对于集合 A, B , 我们把集合 $\{x | x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$ 叫作集合 A 与 B 的差集, 记作 $A - B$. 据此, 下列说法中正确的是()

- A. 若 $A \subseteq B$, 则 $A - B = \emptyset$ B. 若 $B \subseteq A$, 则 $A - B = A$
C. 若 $A \cap B = \emptyset$, 则 $A - B = A$ D. 若 $A \cap B = C$, 则 $A - B = A - C$

10. 高斯是德国著名的数学家, 近代数学奠基者之一, 享有“数学王子”的称号. 设 $x \in \mathbf{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $y = [x]$ 也被称为“高斯函数”, 例如: $[-3.5] = -4$, $[2.1] = 2$. 已知函数 $f(x) = [x+1] - x$, 下列说法中正确的是()

- A. $f(x)$ 是周期函数 B. $f(x)$ 的值域是 $(0, 1]$
C. $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数 D. $\forall x \in \mathbf{R}, [f(x)] = 0$

三、填空题:

11. 已知幂函数 $y = x^\alpha$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$, 则 α 的值为_____.
12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x < 1, \\ x^2 + ax, & x \geq 1, \end{cases}$ 若 $f(f(0)) = 3a$, 则 a 的值为_____.
13. 地震震级是根据地震仪记录的地震波振幅来测定的, 一般采用里氏震级标准. 震级(M)是用据震中 100 千米处的标准地震仪所记录的地震波最大振幅值的对数来表示的. 里氏震级的计算公式为 $M = \lg A - \lg A_0$, 其中 A 是被测地震的最大振幅, A_0 是“标准地震”的振幅(使用标准地震振幅是为了修正测震仪距实际震中的距离造成的偏差). 根据该公式可知, 7.5 级地震的最大振幅是 6 级地震的最大振幅的_____倍(精确到 1).

四、解答题:

14. 已知集合 $A = \{x | \frac{2x+1}{x-1} < 1\}$, $B = \{x | 2x^2 + (m-2)x - m < 0\}$.
- (1) 当 $m=1$ 时, 求 $A \cup B$; (2) 已知“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件, 求实数 m 的取值范围.

15. 已知 $\sin(\pi + \alpha)\cos(\pi - \alpha) = \frac{1}{8}$, 且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

(1) 求 $\cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$ 的值;

(2) 求 $\tan\alpha$ 的值.

16. (1) 计算: $2^{\log_2 5} + (0.125)^{-\frac{2}{3}} + \log_{\sqrt{3}} 9$;

(2) 已知 $a = \log_{0.4} 3$, $b = \log_4 3$, 求证: $ab < a + b < 0$.

17. 已知函数 $f(x) = x|x-a|$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 若不等式 $f(\sin^2 x) + f(t - 2\cos x) \geq 0$ 对任意 $x \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}\right]$ 恒成立, 求实数 t 的最小值.

18. 对于定义在 D 上的函数 $f(x)$, 如果存在实数 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$, 那么称 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个不动点. 已知 $f(x) = ax^2 + 1$.

(1) 当 $a=-2$ 时, 求 $f(x)$ 的不动点;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个不动点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < 2 < x_2$.

① 求实数 a 的取值范围; ② 设 $g(x)=\log_a[f(x)-x]$, 求证: $g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上至少有两个不动点.

注意事项:

1. 本试卷包括单项选择题(第1题~第8题)、多项选择题(第9题~第12题)、填空题(第13题~第16题)、解答题(第17题~第22题)四部分。本试卷满分为150分,考试时间为120分钟。
2. 答卷前,考生务必将自己的学校、姓名、考生号填涂在答题卡上指定的位置。
3. 作答选择题时,选出每小题的答案后,用2B铅笔在答题卡上将对应题目选项的答案信息点涂黑;如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。
4. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答,答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上;如需改动,先划掉原来的答案,再写上新答案;不准使用铅笔和涂改液。

一、单项选择题:本大题共8小题,每小题5分,共40分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的,请把答案填涂在答题卡相应位置上。

1. 若角 α 的终边经过点 $P(3, a)(a \neq 0)$, 则

A. $\sin \alpha > 0$ B. $\sin \alpha < 0$ C. $\cos \alpha > 0$ D. $\cos \alpha < 0$

【答案】C

【考点】三角函数的定义、在各象限的符号

【解析】由三角函数的定义可知, $\sin \alpha = \frac{a}{\sqrt{3^2 + a^2}}$ 符号不确定, $\cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2 + a^2}} > 0$, 故答案选 C.

2. 记函数 $y = \sqrt{4 - x^2}$ 的定义域为 A , 函数 $y = \ln(x - 1)$ 的定义域为 B , 则 $A \cap B =$

A. $(1, 2)$ B. $(1, 2]$ C. $(-2, 1)$ D. $[-2, 1)$

【答案】B

【考点】定义域的求解、集合的交集

【解析】由题意 $A = [-2, 2]$, $B = (1, +\infty)$, 所以 $A \cap B = (1, 2]$, 故答案选 B.

3. 设实数 x 满足 $x > 0$, 函数 $y = 2 + 3x + \frac{4}{x+1}$ 的最小值为

A. $4\sqrt{3} - 1$ B. $4\sqrt{3} + 2$ C. $4\sqrt{2} + 1$ D. 6

【答案】A

【考点】利用基本不等式求最值

【解析】由题意 $x > 0$, 所以 $x+1 > 0$, 所以 $y = 2 + 3x + \frac{4}{x+1} = 2 + 3(x+1) - 3 + \frac{4}{x+1}$
 $= 3(x+1) + \frac{4}{x+1} - 1 \geq 2\sqrt{3(x+1) \cdot \frac{4}{x+1}} - 1 = 4\sqrt{3} - 1$, 当且仅当 $3(x+1) = \frac{4}{x+1}$, 即 $x = \frac{2\sqrt{3}}{3} - 1 > 0$ 时等号成立, 所以函数 $y = 2 + 3x + \frac{4}{x+1}$ 的最小值为 $4\sqrt{3} - 1$, 故答案选 A.

4. 已知 a, b, m 都是负数, 且 $a < b$, 则

A. $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ B. $\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$ C. $a + m > b + m$ D. $\frac{b+m}{a+m} > \frac{b}{a}$

【答案】D

【考点】不等式的基本性质

【解析】法一：可取特殊值 $a=-2$, $b=-1$ 验证可得 D 选项正确；

法二：由题意 $a < b < 0$, 则 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, 选项 A 错误；由 $a < b$, 不等式两边同除 ab , 可得 $\frac{a}{ab} < \frac{b}{ab}$, 即 $\frac{b}{a} < \frac{a}{b}$,

选项 B 错误；由不等式的可加性可知, 由 $a < b$, 可得 $a+m < b+m$, 选项 C 错误；由

$\frac{b+m}{a+m} - \frac{b}{a} = \frac{a(b+m) - b(a+m)}{a(a+m)} = \frac{m(a-b)}{a(a+m)} > 0$, 所以 $\frac{b+m}{a+m} > \frac{b}{a}$, 选项 D 正确；故答案选 D.

5. 有一组实验数据如下表所示：

t	1.9	3.0	4.0	5.1	6.1
v	1.5	4.0	7.5	12.0	18.0

现准备用下列函数中的一个近似地表示这些数据满足的规律, 其中最接近的一个是

A. $v=2t-2$

B. $v=\frac{t^2-1}{2}$

C. $v=\log_{0.5}t$

D. $v=\log_3t$

【答案】B

【考点】函数的基本性质与解析式

【解析】法一：从图表数据可知, 随着 t 的变大, v 变大, 则函数为单调递增, 且增加速度越来越快, 故排除选项 A、C、D (A 选项为线性增加的函数, C 选项为递减函数, D 选项为比线性增加较为缓慢的函数), 故答案选 B.

法二：取 $t=4$, 可得：对于 A 选项, $v=2 \times 4 - 2 = 6$, 故选项 A 错误；对于 B 选项, $v=\frac{t^2-1}{2}=7.5$, 故选项 B 可能正确；对于 C 选项, $v=\log_{0.5}t=-2$, 故选项 C 错误；对于 D 选项, $v=\log_3t=\log_34$, 故选项 D 错误；以上只有 B 选项最接近, 故答案选 B.

6. 若函数 $f(x)=\sin 2x$ 与 $g(x)=2\cos x$ 都在区间 (a, b) 上单调递减, 则 $b-a$ 的最大值是

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{3}$

C. $\frac{\pi}{2}$

D. $\frac{2\pi}{3}$

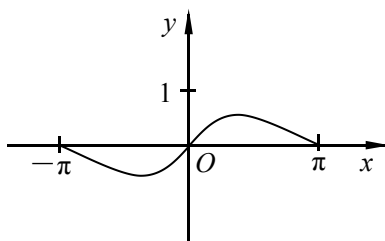
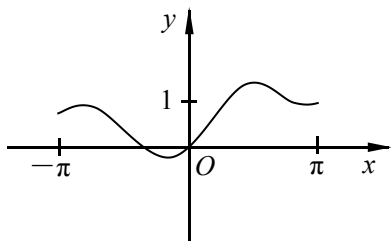
【答案】C

【考点】三角函数的图象与性质：单调性

【解析】由题意函数 $f(x)=\sin 2x$ 在 $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$ 上单调递减, 函数 $g(x)=2\cos x$ 在 $(0, \pi)$ 上单调递减, 则

$b_{\max} = \frac{3\pi}{4}$, $a_{\min} = \frac{\pi}{4}$, 所以 $b-a$ 的最大值为 $\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, 故答案选 C.

7. 函数 $f(x)=\frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的图象大致为



【答案】D

【考点】利用函数的基本性质对函数图象的识别与判断

【解析】由题意该函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上为奇函数，且 $f(\pi) = \frac{\pi}{\pi^2 - 1} \in (0, 1)$ ，故答案排除 A、B、

C，故答案选 D.

8. 若函数 $f(x)$ 同时满足：①定义域内存在实数 x ，使得 $f(x) \cdot f(-x) < 0$ ；②对于定义域内任意 x_1, x_2 ，当 $x_1 \neq x_2$ 时，恒有 $(x_1 - x_2) \cdot [f(x_1) - f(x_2)] > 0$ ；则称函数 $f(x)$ 为“DM 函数”. 下列函数中是“DM 函数”的为

- A. $f(x) = x^3$ B. $f(x) = \sin x$ C. $f(x) = e^{x-1}$ D. $f(x) = \ln x$

【答案】A

【考点】新定义函数的性质

【解析】由题意“DM 函数”为单调递增的奇函数，故只有 A 选项满足，所以答案选 A.

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求，请把答案填涂在答题卡相应位置上. 全部选对得 5 分，部分选对得 3 分，不选或有选错的得 0 分.

9. 关于函数 $f(x) = \tan 2x$ ，下列说法中正确的是

- A. 最小正周期是 $\frac{\pi}{2}$ B. 图象关于点 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 对称
C. 图象关于直线 $x = \frac{\pi}{4}$ 对称 D. 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上单调递增

【答案】AB

【考点】正切函数的图象与性质

【解析】由题意函数 $f(x) = \tan 2x$ 的最小正周期为 $T = \frac{\pi}{2}$ ，故选项 A 正确；由 $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ ，故选项 B 正确；因

为函数 $f(x) = \tan 2x$ 不存在对称轴，故选项 C 错误；因为 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ，所以 $2x \in (-\pi, \pi)$ ，此区间不是函

数 $y=\tan x$ 的单调递增区间, 故选项 D 错误; 故答案选 AB.

10. 已知曲线 $C_1: y=\sin x$, $C_2: y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$, 下列说法中正确的是

- A. 把 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将所有点的横坐标变为原来的 2 倍, 得到 C_2
- B. 把 C_1 向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 得到 C_2
- C. 把 C_1 上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 再向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 得到 C_2
- D. 把 C_1 上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 C_2

【答案】BD

【考点】函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象变换

【解析】变换方式一: 由函数 $y=\sin x$ 的图象可向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度, 再将所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 得到 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$; 变换方式二: 因为 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin[2(x+\frac{\pi}{6})]$, 所以由函数 $y=\sin x$ 的图象可讲其图象上所有点的横坐标变为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍, 再向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度, 得到 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$; 故答案选 BD.

11. 我们知道, 如果集合 $A \subseteq S$, 那么 S 的子集 A 的补集为 $\complement_S A = \{x | x \in S, \text{ 且 } x \notin A\}$. 类似地, 对于集合 A, B , 我们把集合 $\{x | x \in A, \text{ 且 } x \notin B\}$ 叫作集合 A 与 B 的差集, 记作 $A-B$. 据此, 下列说法中正确的是

- A. 若 $A \subseteq B$, 则 $A-B=\emptyset$
- B. 若 $B \subseteq A$, 则 $A-B=A$
- C. 若 $A \cap B=\emptyset$, 则 $A-B=A$
- D. 若 $A \cap B=C$, 则 $A-B=A-C$

【答案】ACD

【考点】新定义集合的应用

【解析】由差集的定义可知, 对于选项 A, 若 $A \subseteq B$, 则 A 中的元素均在 B 中, 则 $A-B=\emptyset$, 故选项 A 正确; 对于选项 B, 若 $B \subseteq A$, 则 B 中的元素均在 A 中, 则 $A-B=\complement_A B \neq A$, 故选项 B 错误; 对于选项 C, 若 $A \cap B=\emptyset$, 则 A, B 无公共元素, 则 $A-B=A$, 故选项 C 正确; 对于选项 D, 若 $A \cap B=C$, 则 $A-B=\complement_A C=A-C$, 故选项 D 正确; 故答案选 ACD.

12. 高斯是德国著名的数学家, 近代数学奠基者之一, 享有“数学王子”的称号. 设 $x \in \mathbf{R}$, 用 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数, $y=[x]$ 也被称为“高斯函数”, 例如: $[-3.5]=-4$, $[2.1]=2$. 已知函数 $f(x)=[x+1]-x$, 下列说法中正确的是

- A. $f(x)$ 是周期函数
- B. $f(x)$ 的值域是 $(0, 1]$

C. $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上是增函数

D. $\forall x \in \mathbf{R}, [f(x)] = 0$

【答案】AB

【考点】新定义函数的基本性质及应用

【解析】由题意 $[x+1] = \begin{cases} -1, -2 \leq x < -1 \\ 0, -1 \leq x < 0 \\ 1, 0 \leq x < 1 \\ 2, 1 \leq x < 2 \end{cases}$, 所以 $f(x) = [x+1] - x = \begin{cases} -1-x, -2 \leq x < -1 \\ -x, -1 \leq x < 0 \\ 1-x, 0 \leq x < 1 \\ 2-x, 1 \leq x < 2 \end{cases}$, 可画出图象(图

略), 可得到函数 $f(x)$ 是周期为1的函数, 且值域为 $(0, 1]$, 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 故选项A、B正确, C错误; 对于选项D, $[f(x)] = 1$, 所以选项D错误, 故答案选AB.

三、填空题: 本大题共4小题, 每小题5分, 共20分. 请把答案填写在答题卡相应位置上.

13. 已知幂函数 $y = x^\alpha$ 的图象过点 $(2, \sqrt{2})$, 则 α 的值为 .

【答案】 $\frac{1}{2}$

【考点】幂函数的概念

【解析】由题意可知 $\sqrt{2} = 2^\alpha$, 即 $2^{\frac{1}{2}} = 2^\alpha$, 解得 $\alpha = \frac{1}{2}$, 故答案为 $\frac{1}{2}$.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x + 1, & x < 1, \\ x^2 + ax, & x \geq 1, \end{cases}$ 若 $f(f(0)) = 3a$, 则 a 的值为 .

【答案】4

【考点】分段函数求参数

【解析】由题意可知 $f(0) = 2^0 + 1 = 2$, $f(2) = 2^2 + 2a = 3a$, 解得 $a = 4$, 故答案为4.

15. 已知 $\sin(\alpha + \frac{\pi}{6}) = \frac{1}{3}$, 则 $\sin(\frac{5\pi}{6} - \alpha) + \sin^2(\frac{\pi}{3} - \alpha)$ 的值为 .

【答案】 $\frac{11}{9}$

【考点】三角函数中同角的三角函数关系式与诱导公式综合应用(给值求值)

【解析】因为 $(\alpha + \frac{\pi}{6}) + (\frac{5\pi}{6} - \alpha) = \pi$, $(\alpha + \frac{\pi}{6}) + (\frac{\pi}{3} - \alpha) = \frac{\pi}{2}$, 所以 $\sin(\frac{5\pi}{6} - \alpha) =$

$$\sin\left[\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - \left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)\right] = \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{3},$$

所以 $\sin(\frac{5\pi}{6} - \alpha) + \sin^2(\frac{\pi}{3} - \alpha) = \frac{1}{3} + 1 - \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{4}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{11}{9}$. 故答案为 $\frac{11}{9}$.

16. 地震震级是根据地震仪记录的地震波振幅来测定的, 一般采用里氏震级标准. 震级(M)是用据震中100千米处的标准地震仪所记录的地震波最大振幅值的对数来表示的. 里氏震级的计算公式为 $M = \lg A -$

$\lg A_0$, 其中 A 是被测地震的最大振幅, A_0 是“标准地震”的振幅(使用标准地震振幅是为了修正测震仪距实际震中的距离造成的偏差). 根据该公式可知, 7.5 级地震的最大振幅是 6 级地震的最大振幅的 ▲ 倍(精确到 1).

【答案】32

【考点】文化题: 指对数的运算

【解析】由题意 $M = \lg A - \lg A_0 = \lg \frac{A}{A_0}$, 即 $\frac{A}{A_0} = 10^M$, 则 $A = A_0 \cdot 10^M$, 当 $M=7.5$ 时, 地震的最大振幅为

$A_1 = A_0 \cdot 10^{7.5}$; 当 $M=6$ 时, 地震的最大振幅为 $A_2 = A_0 \cdot 10^6$, 所以 $\frac{A_1}{A_2} =$

$\frac{10^{7.5}}{10^6} = 10^{7.5-6} = 10^{1.5} = 10^{\frac{3}{2}} = \sqrt{10^3} \approx 32$, 故答案为 32.

四、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出必要的文字说明,

证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

已知集合 $A = \{x | \frac{2x+1}{x-1} < 1\}$, $B = \{x | 2x^2 + (m-2)x - m < 0\}$.

(1) 当 $m=1$ 时, 求 $A \cup B$;

(2) 已知“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件, 求实数 m 的取值范围.

【考点】集合与逻辑用语(含分式不等式、一元二次不等式的解法)

【解析】

解: (1) 由 $\frac{2x+1}{x-1} < 1$, 得 $\frac{x+2}{x-1} < 0$, 所以 $A = \{x | -2 < x < 1\}$.

$B = \{x | 2x^2 + (m-2)x - m < 0\} = \{x | (x-1)(2x+m) < 0\}$.

当 $m=1$ 时, $B = \{x | -\frac{1}{2} < x < 1\}$ 3 分

所以 $A \cup B = \{x | -2 < x < 1\}$ 4 分

(2) 因为“ $x \in A$ ”是“ $x \in B$ ”的必要条件, 所以 $B \subseteq A$ 6 分

若 $-\frac{m}{2} > 1$, 不符合题意; 7 分

若 $-\frac{m}{2} = 1$ 即 $m = -2$ 时, $B = \emptyset$, 符合题意; 8 分

若 $-\frac{m}{2} < 1$, 则 $B = \{x | -\frac{m}{2} < x < 1\}$,

所以 $-2 \leq -\frac{m}{2} < 1$, 解得 $-2 < m \leq 4$ 9 分

综上, $m \in [-2, 4]$ 10 分

18. (本小题满分 12 分)

已知 $\sin(\pi + \alpha)\cos(\pi - \alpha) = \frac{1}{8}$, 且 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

(1) 求 $\frac{\cos \alpha + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{2}$ 的值;

(2) 求 $\tan \alpha$ 的值.

【考点】同角的三角函数公式、诱导公式

【解析】

解: (1) 因为 $\sin(\pi + \alpha)\cos(\pi - \alpha) = \sin \alpha \cos \alpha$, 且 $\sin(\pi + \alpha)\cos(\pi - \alpha) = \frac{1}{8}$,

所以 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{8}$ 2 分

故 $(\cos \alpha - \sin \alpha)^2 = \cos^2 \alpha - 2\sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha$

$$= 1 - 2\sin \alpha \cos \alpha = 1 - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{4}. \quad \text{..... 4 分}$$

又因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, 所以 $\cos \alpha > \sin \alpha$, 即 $\cos \alpha - \sin \alpha > 0$,

$$\text{所以 } \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{所以 } \frac{\cos \alpha + \cos(\frac{\pi}{2} + \alpha)}{2} = \frac{\cos \alpha - \sin \alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad \text{..... 6 分}$$

(2) 法一: 由 (1) 知 $\sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{8}$, 又因为 $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$,

$$\text{所以 } \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \frac{1}{8}.$$

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, $\cos \alpha \neq 0$,

$$\text{所以 } \frac{\tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = \frac{1}{8}, \text{ 即 } \tan^2 \alpha - 8 \tan \alpha + 1 = 0, \quad \text{..... 9 分}$$

$$\text{解得 } \tan \alpha = 4 - \sqrt{15} \text{ 或 } \tan \alpha = 4 + \sqrt{15}. \quad \text{..... 10 分}$$

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, 所以 $0 < \tan \alpha < 1$,

$$\text{所以 } \tan \alpha = 4 - \sqrt{15}. \quad \text{..... 12 分}$$

$$\text{法二: 由 (1) 知 } \begin{cases} \cos \alpha - \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{8}. \end{cases}$$

因为 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, 所以 $\cos \alpha > \sin \alpha > 0$,

$$\text{故} \begin{cases} \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}, \\ \sin\alpha = \frac{-\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4}, \end{cases} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 4 - \sqrt{15}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 12 分)

$$(1) \text{ 计算: } 2^{\log_2 5} + (0.125)^{-\frac{2}{3}} + \log_{\sqrt{3}} 9;$$

$$(2) \text{ 已知 } a = \log_{0.4} 3, b = \log_4 3, \text{ 求证: } ab < a + b < 0.$$

【考点】指对数的运算、指对数的应用：比较大小

【解析】

$$\begin{aligned} \text{解: } (1) \text{ 原式} &= 5 + [(2)^{-3}]^{-\frac{2}{3}} + \log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^4 \\ &= 5 + 4 + 4 \\ &= 13. \dots\dots\dots 4 \text{ 分} \end{aligned}$$

(2) 法一：因为 $y = \log_{0.4} x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递减， $y = \log_4 x$ 在 $(0, +\infty)$ 上递增，

$$\text{所以 } a = \log_{0.4} 3 < \log_{0.4} 1 = 0, b = \log_4 3 > \log_4 1 = 0,$$

$$\text{故 } ab < 0. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \log_3 0.4 + \log_3 4 = \log_3 (0.4 \times 4) = \log_3 1.6,$$

且 $y = \log_3 x$ 在 $(0, +\infty)$ 递增，

$$\text{所以 } 0 = \log_3 1 < \log_3 1.6 < \log_3 3 = 1, \text{ 即 } 0 < \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < 1. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } 0 > ab \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) > ab, \text{ 即 } ab < a + b < 0. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

法二：因为 $a = \log_{0.4} 3, b = \log_4 3,$

$$\text{所以 } a + b = \log_{0.4} 3 + \log_4 3 = \frac{\lg 3}{\lg 0.4} + \frac{\lg 3}{\lg 4} = \lg 3 \times \frac{\lg 4 + \lg 0.4}{\lg 0.4 \cdot \lg 4} = \lg 3 \times \frac{\lg 1.6}{\lg 0.4 \cdot \lg 4},$$

$$\text{因为 } \lg 3 > 0, \lg 4 > 0, \lg 1.6 > 0, \lg 0.4 < 0,$$

$$\text{所以 } a + b < 0. \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(a + b) - ab = \lg 3 \times \frac{\lg 1.6}{\lg 0.4 \cdot \lg 4} - \frac{\lg 3}{\lg 0.4} \times \frac{\lg 3}{\lg 4} = \lg 3 \times \frac{\lg 1.6 - \lg 3}{\lg 0.4 \cdot \lg 4}$$

$$= \lg 3 \times \frac{\lg \frac{1.6}{3}}{\lg 0.4 \cdot \lg 4} = \lg 3 \times \frac{\lg \frac{8}{15}}{\lg 0.4 \cdot \lg 4}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \lg 3 > 0, \lg 4 > 0, \lg \frac{8}{15} < 0, \lg 0.4 < 0,$$

所以 $(a+b)-ab>0$, 即 $a+b>ab$,

综上, $ab<a+b<0$ 12 分

20. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x|x-a|$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 若不等式 $f(\sin^2x)+f(t-2\cos x)\geq 0$ 对任意 $x\in[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]$ 恒成立, 求实数 t 的最小值.

【考点】函数的基本性质: 奇偶性、单调性, 及其应用: 恒成立问题

【解析】

解: (1) 因为函数 $f(x)=x|x-a|$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,

所以 $f(-x)=-f(x)$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立,

即 $(-x)\cdot|-x-a|=-x\cdot|x-a|$ 对任意 $x\in\mathbf{R}$ 成立, 2 分

所以 $|-x-a|=|x-a|$, 所以 $a=0$ 4 分

(2) 由 $f(\sin^2x)+f(t-2\cos x)\geq 0$ 得 $f(\sin^2x)\geq -f(t-2\cos x)$,

因为函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的奇函数, 所以 $f(\sin^2x)\geq f(2\cos x-t)$ 6 分

由 (1) 得, $f(x)=x|x|=\begin{cases} x^2, & x\geq 0, \\ -x^2, & x< 0, \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的单调增函数,

故 $\sin^2x\geq 2\cos x-t$ 对任意 $x\in[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]$ 恒成立. 8 分

所以 $t\geq 2\cos x-\sin^2x$ 对任意 $x\in[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]$ 恒成立.

因为 $2\cos x-\sin^2x=\cos^2x+2\cos x-1=(\cos x+1)^2-2$,

令 $m=\cos x$, 由 $x\in[\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{6}]$, 得 $\cos x\in[-1, \frac{1}{2}]$, 即 $m\in[-1, \frac{1}{2}]$ 10 分

所以 $y=(m+1)^2-2$ 的最大值为 $\frac{1}{4}$, 故 $t\geq \frac{1}{4}$,

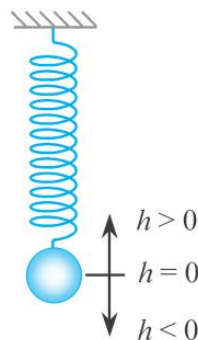
即 t 的最小值为 $\frac{1}{4}$ 12 分

21. (本小题满分 12 分)

如图, 弹簧挂着的小球做上下振动, 它在 t (单位: s) 时相对于平衡位置(静止时的位置)的高度 h (单位: cm) 由关系式 $h=A\sin(\omega t+\frac{\pi}{4})$ 确定, 其中 $A>0$, $\omega>0$, $t\in[0, +\infty)$. 在一次振动中, 小球从最高点运动至最低点所用时间为 1 s. 且最高点与最低点间的距离为 10 cm.

(1) 求小球相对平衡位置的高度 h (单位: cm) 和时间 t (单位: s) 之间的函数关系;

(2) 小球在 t_0 s 内经过最高点的次数恰为 50 次, 求 t_0 的取值范围.



(第 21 题图)

【考点】三角函数在物理中的应用

【解析】

解: (1) 因为小球振动过程中最高点与最低点的距离为 10 cm, 所以 $A = \frac{10}{2} = 5$ 2 分

因为在一次振动中, 小球从最高点运动至最低点所用时间为 1 s, 所以周期为 2,

即 $T = 2 = \frac{2\pi}{\omega}$, 所以 $\omega = \pi$ 4 分

所以 $h = 5\sin(\pi t + \frac{\pi}{4})$, $t \geq 0$ 5 分

(2) 由题意, 当 $t = \frac{1}{4}$ 时, 小球第一次到达最高点,

以后每隔一个周期都出现一次最高点, ... 7 分

因为小球在 t_0 s 内经过最高点的次数恰为 50 次,

所以 $\frac{1}{4} + 49T \leq t_0 < \frac{1}{4} + 50T$ 9 分

因为 $T = 2$, 所以 $98\frac{1}{4} \leq t_0 < 100\frac{1}{4}$,

所以 t_0 的取值范围为 $[98\frac{1}{4}, 100\frac{1}{4})$ 12 分

(注: t_0 的取值范围不考虑开闭)

22. (本小题满分 12 分)

对于定义在 D 上的函数 $f(x)$, 如果存在实数 x_0 , 使得 $f(x_0) = x_0$, 那么称 x_0 是函数 $f(x)$ 的一个不动点. 已知 $f(x) = ax^2 + 1$.

(1) 当 $a = -2$ 时, 求 $f(x)$ 的不动点;

(2) 若函数 $f(x)$ 有两个不动点 x_1, x_2 , 且 $x_1 < 2 < x_2$.

①求实数 a 的取值范围;

②设 $g(x)=\log_a[f(x)-x]$, 求证: $g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上至少有两个不动点.

【考点】新定义函数的零点、三个“二次”的转化、利用构造新函数解决零点问题

【解析】

解: (1) 当 $a=-2$ 时, $f(x)=-2x^2+1$.

方程 $f(x)=x$ 可化为 $2x^2+x-1=0$, 解得 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{2}$,

所以 $f(x)$ 的不动点为 -1 和 $\frac{1}{2}$ 2 分

(2) ①因为函数 $f(x)$ 有两个不动点 x_1, x_2 ,

所以方程 $f(x)=x$, 即 $ax^2-x+1=0$ 的两个实数根为 x_1, x_2 ,

记 $p(x)=ax^2-x+1$, 则 $p(x)$ 的零点为 x_1 和 x_2 ,

因为 $x_1 < 2 < x_2$, 所以 $a \cdot p(2) < 0$,

即 $a(4a-1) < 0$, 解得 $0 < a < \frac{1}{4}$.

所以实数 a 的取值范围为 $(0, \frac{1}{4})$ 6 分

②因为 $g(x)=\log_a[f(x)-x]=\log_a(ax^2-x+1)$.

方程 $g(x)=x$ 可化为 $\log_a(ax^2-x+1)=x$, 即 $\begin{cases} a^x=ax^2-x+1, \\ ax^2-x+1>0. \end{cases}$

因为 $0 < a < \frac{1}{4}$, $\Delta=1-4a>0$, 所以 $p(x)=0$ 有两个不相等的实数根.

设 $p(x)=ax^2-x+1=0$ 的两个实数根为 m, n , 不妨设 $m < n$.

因为函数 $p(x)=ax^2-x+1$ 图象的对称轴为直线 $x=\frac{1}{2a}$, $p(1)=a>0$, $\frac{1}{2a}>1$, $p(\frac{1}{a})=1>0$,

所以 $1 < m < \frac{1}{2a} < n < \frac{1}{a}$.

记 $h(x)=a^x-(ax^2-x+1)$,

因为 $h(1)=0$, 且 $p(1)=a>0$, 所以 $x=1$ 是方程 $g(x)=x$ 的实数根,

所以 1 是 $g(x)$ 的一个不动点. 8 分

$h(n)=a^n-(an^2-n+1)=a^n>0$,

因为 $0 < a < \frac{1}{4}$, 所以 $\frac{1}{a}>4$, $h(\frac{1}{a})=a^{\frac{1}{a}}-1 < a^4-1 < 0$,

且 $h(x)$ 的图象在 $[n, \frac{1}{a}]$ 上的图象是不间断曲线,

所以 $\exists x_0 \in (n, \frac{1}{a})$, 使得 $h(x_0)=0$, 10 分

又因为 $p(x)$ 在 $(n, \frac{1}{a})$ 上单调递增, 所以 $p(x_0)>p(n)=0$,

所以 x_0 是 $g(x)$ 的一个不动点,

综上， $g(x)$ 在 $(a, +\infty)$ 上至少有两个不动点。 12 分

亚森复变