

仪征中学高一周末测试 5

一、选择题（本大题共 12 小题，共 60.0 分）

1. 设 $2^a=5^b=10$, 则 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(\quad)$
A. -1 B. 1 C. 2 D. 5
2. 与角 $\frac{5\pi}{8}$ 终边相同的角是 $(\quad)$
A. $\frac{3\pi}{8}$ B. $\frac{7\pi}{8}$ C. $\frac{11\pi}{8}$ D. $\frac{21\pi}{8}$
3. 设 α 是第三象限的角, 且 $\sin\frac{\alpha}{2}<0$, $\cos\frac{\alpha}{2}>0$, 则 $\frac{\alpha}{2}$ 是 $(\quad)$
A. 第一象限的角 B. 第二象限的角 C. 第三象限的角 D. 第四象限的角
4. 已知函数 $y=f(x)$ 定义域是 $[-2, 3]$, 则 $y=f(2x-1)$ 的定义域是 $(\quad)$
A. $[0, \frac{5}{2}]$ B. $[-1, 4]$ C. $[-\frac{1}{2}, 2]$ D. $[-5, 5]$
5. 设 $a=\log_3 3$, $b=\log_{\frac{1}{3}} 7$, $c=3^{0.7}$, 则 a, b, c 的大小关系是 $(\quad)$
A. $a < b < c$ B. $c < b < a$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$
6. 计算 $\lg 200 + \frac{1}{2} \lg 25 + 5(\lg 2 + \lg 5)^3 - (\frac{1}{27})^{-\frac{1}{3}} = (\quad)$
A. 2 B. 3 C. 4 D. 5
7. 函数 $f(x) = x^2 - \frac{2}{x}$ 的零点位于区间 $(\quad)$
A. $(1, \frac{5}{4})$ B. $(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$ C. $(\frac{3}{2}, \frac{7}{4})$ D. $(\frac{7}{4}, 2)$
8. 已知全集 $U=\mathbb{R}$, 集合 $A=\{x|2^x > \frac{1}{2}\}$, $B=\{x|\log_3 x < 1\}$, 则 $A \cap (\complement_U B) = (\quad)$
A. $(-1, +\infty)$ B. $[3, +\infty)$
C. $(-1, 0) \cup (3, +\infty)$ D. $(-1, 0] \cup [3, +\infty)$
9. 已知函数 $y=f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 上是减函数, 且 $f(2a-1) < f(1-a)$, 则实数 a 的取值范围是 $(\quad)$
A. $(\frac{2}{3}, +\infty)$ B. $(\frac{2}{3}, 1)$ C. $(0, 2)$ D. $(0, +\infty)$
10. 设方程 $(\lg x)^2 - \lg x^2 - 3 = 0$ 的两实根是 a 和 b , 则 $\log_a b + \log_b a$ 等于 $(\quad)$
A. 1 B. -2 C. $-\frac{10}{3}$ D. -4
11. 定义在 $\mathbb{R}$ 上的偶函数 $f(x)$ 满足: 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0] (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$, 且 $f(2)=0$, 则不等式 $\frac{2f(x)+f(-x)}{5x} < 0$ 解集是 $(\quad)$
A. $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ B. $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$
C. $(-2, 0) \cup (2, +\infty)$ D. $(-2, 0) \cup (0, 2)$
12. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x \leq 1 \\ \log_2 x, & x > 1 \end{cases}$, $g(x) = f(x) + 2x + a$. 若 $g(x)$ 存在两个零点, 则 a 的取值范围是 $(\quad)$
A. $(-\infty, 4]$ B. $(2, 4]$ C. $[-4, +\infty)$ D. $[-4, -2)$

二、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 时钟从 6 时走到 9 时，时针旋转了_____ 弧度.

14. 若扇形的周长是 20cm ，圆心角是 2 弧度，则扇形的面积是_____.

15. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x + 4a, & x > 3 \\ 2x + a^2, & x \leq 3 \end{cases}$ 若 $f(x)$ 的值域为 R ，则实数 a 的取值范围是_____.

16. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - a, & x \geq 0 \\ x^2 + ax + a, & x < 0 \end{cases}$ 有三个不同的零点，则实数 a 的取值范围是_____.

三、解答题

17. 计算下列各题：

(1) $(5\frac{1}{16})^{0.5} + (-1)^{-1} \div 0.75^{-2} + (2\frac{10}{27})^{-\frac{2}{3}}$; (2) $\log_3 \sqrt{27} + \lg 25 + \lg 4 + 7^{\log_7 2} + (-9.8)^0$

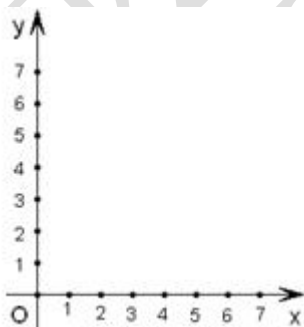
18. 已知函数 $f(x) = \log_3 \frac{x}{9} \cdot \log_3 (3x)$.

(1) 解不等式 $f(x) > 0$;

(2) 当函数 $f(x)$ 的定义域为 $[1, 9]$ 时，求 $f(x)$ 的值域.

19. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x \in [1, 4] \\ (x-5)^2 + 1, & x \in (4, 7] \end{cases}$

(1) 在给定的直角坐标系内画出 $f(x)$ 的图象;



(2) 写出 $f(x)$ 的单调增区间和值域; (不需要过程);

(3) 根据图象写出 $f(x) < 2$ 的解集(不需要过程).

20. 已知 $y = f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数，且 $x < 0$ 时， $f(x) = 1 + 2^x$

(1) 求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 画出函数 $f(x)$ 的图象;

(3) 写出函数 $f(x)$ 单调区间及值域.

21. 近年来,雾霾日趋严重,我们的工作、生活受到了严重的影响,如何改善空气质量已成为当今的热点问题.某空气净化器制造厂,决定投入生产某型号空气净化器,根据以往的生产销售经验得到下面有关生产销售的统计规律:每生产该型号空气净化器 x (百台),其总成本为 $P(x)$ (万元),其中固定成本为12万元,并且每生产1百台的生产成本为10万元(总成本=固定成本+生产成本).销售收入 $Q(x)$ (万元)满足 $Q(x) =$

$$\begin{cases} -0.5x^2 + 22x & (0 \leq x \leq 16) \\ 224 & (x > 16) \end{cases}$$
, 假定该产品产销平衡(即生产的产品都能卖掉),根据以述统计规律,

请完成下列问题:

(1)求利润函数 $y = f(x)$ 的解析式(利润=销售收入-总成本);

(2)工厂生产多少百台产品时,可使利润最多?

22. 已知定义域为 R 的函数 $f(x) = \frac{-2^x + a}{2^x + 1}$ 是奇函数

(1)求 a 值;

(2)判断并证明该函数在定义域 R 上的单调性;

(3)若对任意的 $t \in R$,不等式 $f(t^2 - 2t) + f(2t^2 - k) < 0$ 恒成立,求实数 k 的取值范围;

(4)设关于 x 的函数 $F(x) = f(4^x - b) + f(-2^{x+1})$ 有零点,求实数 b 的取值范围.

答案和解析

1. 【答案】B

【解析】

解： $\because 2^a = 5^b = 10$, $\therefore a = \frac{1}{\lg 2}$, $b = \frac{1}{\lg 5}$.

则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \lg 2 + \lg 5 = 1$.

故选：B.

把指数式化为对数式，再利用对数的运算法则即可得出.

本题考查了指数式化为对数式、对数的运算法则，属于基础题.

2. 【答案】C

【解析】

解： $\because$ 与 $-\frac{5\pi}{8}$ 角终边相同的角的集合为 $A = \{\alpha | \alpha = -\frac{5\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$,

取 $k=1$, 得 $\alpha = \frac{11\pi}{8}$.

$\therefore$ 与 $-\frac{5\pi}{8}$ 角终边相同的角是 $\frac{11\pi}{8}$.

故选：C.

直接写出终边相同角的集合得答案.

本题考查了终边相同角的概念，是基础的计算题.

3. 【答案】D

【解析】

解：由 $\sin \frac{\alpha}{2} < 0$, 得出 $\frac{\alpha}{2}$ 是第三或第四象限或终边在 y 负半轴上的角,

由 $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$, 得出 $\frac{\alpha}{2}$ 是第一或第四象限或在 x 正半轴上的角,

综上, $\frac{\alpha}{2}$ 是第四象限角.

故选：D.

根据三角函数值的符号法则即可判断 $\frac{\alpha}{2}$ 所在的象限.

本题考查了三角函数值符号的判断问题，是基础题目.

4. 【答案】C

【解析】

【分析】

本题主要考查函数定义域的求解，根据复合函数定义域之间的关系解不等式

是解决本题的关键, 是基础题.

根据复合函数定义域之间的关系即可得到结论.

【解答】

解: $\because$ 函数 $y=f(x)$ 定义域是 $[-2, 3]$,

$\therefore$ 由 $-2 \leq 2x-1 \leq 3$,

解得 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$,

即函数的定义域为 $[-\frac{1}{2}, 2]$,

故选 C.

5. **【答案】** D

【解析】

【分析】

利用指数函数和对数函数的单调性求解. 本题考查三个数的大小的求法, 是基础题, 解题时要认真审题, 注意函数性质的合理运用.

【解答】

解: $0 = \log_7 1 < a = \log_7 3 < \log_7 7 = 1$,

$b = \log_{\frac{1}{3}} 7 < \log_{\frac{1}{3}} 1 = 0$,

$c = 3^{0.7} > 3^0 = 1$,

$\therefore b < a < c$.

故选 D.

6. **【答案】** D

【解析】

解: $\lg 200 + \frac{1}{2} \lg 25 + 5(\lg 2 + \lg 5)^3 - (\frac{1}{27})^{-\frac{1}{3}}$

$= 2 + \lg 2 + \lg 5 + 5 - 3$

$= 5$.

故选: D.

直接利用对数运算法则化简求解即可.

本题考查对数运算法则的应用, 考查计算能力.

7. **【答案】** B

【解析】

解: 函数 $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$,

可得 $f(1)=-1<0$, $f(\frac{3}{2})=\frac{9}{4}-\frac{4}{3}>0$,

$f(\frac{5}{4})=\frac{25}{16}-\frac{8}{5}=-\frac{43}{80}<0$.

$f(\frac{3}{2})\cdot f(\frac{5}{4})<0$.

函数 $f(x)=x^2-\frac{2}{x}$ 的零点位于区间: $(\frac{5}{4}, \frac{3}{2})$.

故选: B.

直接利用零点判定定理, 计算端点函数值, 判断即可.

本题考查零点判定定理的应用, 考查计算能力.

8. 【答案】 D

【解析】

解: 由 $2^x > \frac{1}{2}$ 可得, $x > -1$, $\therefore$ 集合 $A = \{x | x > -1\}$,

由 $\log_3 x < 1$ 可得 $0 < x < 3$, $\therefore$ 集合 $C_U B = \{x | x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 3\}$, 则 $(C_U B) = \{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq 0\}$

那么: $A \cap (C_U B) = \{x | -1 \leq x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 3\}$,

故选 D

求解 A, B 中的不等式的定义域可得集合 A, 集合 B, 根据集合的基本运算即可求.

本题主要考查集合的基本运算, 比较基础.

9. 【答案】 B

【解析】

【分析】

利用函数 $y=f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 上是减函数, 将 $f(2a-1) < f(1-a)$ 转化为: $2a-1$

$> 1-a$ 求解. 本题考察了函数的性质的运用, 利用了减函数这性质, 注意定义

域的范围. 比较基础.

【解答】

函数 $y=f(x)$ 在定义域 $(-1, 1)$ 上是减函数,

则有:
$$\begin{cases} 1 > 2a-1 > -1 \\ -1 < 1-a < 1 \\ 2a-1 > 1-a \end{cases},$$

解得: $\frac{2}{3} < a < 1$,

故选 B.

10. 【答案】C

【解析】

解: 方程 $(\lg x)^2 - \lg x^2 - 3 = 0$ 化为 $(\lg x)^2 - 2\lg x - 3 = 0$,

解得 $\lg x = 3$ 或 -1 .

由于方程 $(\lg x)^2 - \lg x^2 - 3 = 0$ 的两实根是 a 和 b ,

不妨设 $\lg a = 3$, $\lg b = -1$.

则 $\log_a b + \log_b a = \frac{\lg a}{\lg b} + \frac{\lg b}{\lg a} = \frac{3}{-1} + \frac{-1}{3} = -\frac{10}{3}$.

故选 C.

本题考查可以转化为一元二次方程的方程的解法、对数的换底公式, 方程

$(\lg x)^2 - \lg x^2 - 3 = 0$ 化为 $(\lg x)^2 - 2\lg x - 3 = 0$, 解得 $\lg x = 3$ 或 -1 . 由于方程 $(\lg x)^2 - \lg x^2 - 3 = 0$ 的两实根是 a 和 b , 不妨设 $\lg a = 3$, $\lg b = -1$. 再利用对数的换底公式即可得出.

11. 【答案】B

【解析】

解: $\because$ 对任意的 $x_1, x_2 \in (-\infty, 0] (x_1 \neq x_2)$, 有 $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} < 0$,

$\therefore$ 此时函数 $f(x)$ 为减函数,

$\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore$ 当 $x \geq 0$ 时, 函数为增函数,

则不等式 $\frac{2f(x) + f(-x)}{5x} < 0$ 等价于 $\frac{3f(x)}{5x} < 0$, 即 $xf(x) < 0$,

$\because f(-2) = -f(2) = 0$,

$\therefore$ 作出函数 $f(x)$ 的草图:

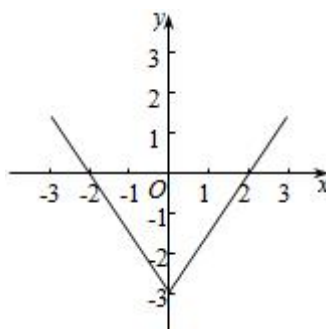
则 $xf(x) < 0$ 等价于 $\begin{cases} x > 0 \\ f(x) < 0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x < 0 \\ f(x) > 0 \end{cases}$,

即 $x < -2$ 或 $0 < x < 2$,

故不等式的解集为 $(-\infty, -2) \cup (0, 2)$.

故选: B

根据函数奇偶性和单调性之间的关系解不等式即可.



本题主要考查不等式的解集, 利用函数奇偶性和单调性之间的关系是解决本题的关键.

12. 【答案】D

【解析】

【分析】

本题主要考查函数的零点问题, 可以转化为函数 $y=f(x)$ 和函数 $y=-2x-a$ 的交点问题.

【解答】

解: $g(x)=f(x)+2x+a$ 存在两个零点等价于函数 $y=f(x)$ 和函数 $y=-2x-a$ 有两个交点,

结合图像易知 a 的取值范围是 $[-4,-2)$,

故答案为 D.

13. 【答案】 $-\frac{\pi}{2}$

【解析】

解: 时钟从 6 时走到 9 时, 时针旋转了 $-\frac{\pi}{2}$ 弧度.

故答案为: $-\frac{\pi}{2}$.

直接利用角的定义, 写出结果即可.

本题考查角的定义, 基本知识的考查.

14. 【答案】 25cm^2

【解析】

【分析】

本题考查扇形的面积公式及弧长公式, 利用已知条件结合公式求出半径即可求解.

【解答】

解: 设扇形的半径为 R , 弧长为 l , 面积为 S , 圆心角为 α ,

由于 $\alpha=2$ 弧度,

可得 $l=R\alpha=2R$,

由于扇形的周长为 $20=l+2R$,

所以 $2R+2R=20$,

所以解得 $R=5$, 扇形的弧长 $l=2\times 5=10$,

扇形的面积为 $S = \frac{1}{2} l R = \frac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25 \text{ cm}^2$,

故答案为 25 cm^2 .

15. 【答案】 $(-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$

【解析】

【分析】

本题考查了分段函数的值域问题和分类讨论的数学思想, 分段函数的值域是在区间内求出函数的取值范围, 再求它们的并集即得出值域, 属于中档题.

【解答】

解: 函数 $f(x) = \begin{cases} 3^x + 4a, & x > 3 \\ 2x + a^2, & x \leq 3 \end{cases}$,

当 $x > 3$ 时, $f(x) = 3^x + 4a$, 在 $(3, +\infty)$ 上为增函数, $f(x) \in (27 + 4a, +\infty)$;

当 $x \leq 3$ 时, $f(x) = 2x + a^2$, 在 $(-\infty, 3]$ 上为增函数, $f(x) \in (-\infty, 6 + a^2]$;

若 $f(x)$ 的值域为 $\mathbb{R}$, 则 $(-\infty, 6 + a^2] \cup (27 + 4a, +\infty) = \mathbb{R}$,

则 $6 + a^2 \geq 27 + 4a$, 即 $a^2 - 4a - 21 \geq 0$, 解得 $a \leq -3$, 或 $a \geq 7$,

则实数 a 的取值范围是 $(-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$.

故答案为: $(-\infty, -3] \cup [7, +\infty)$.

16. 【答案】 $a > 4$

【解析】

解: 由题意可得函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴

有三个不同的交点, 如图所示:

等价于当 $x \geq 0$ 时, 方程 $2^x - a = 0$ 有一个

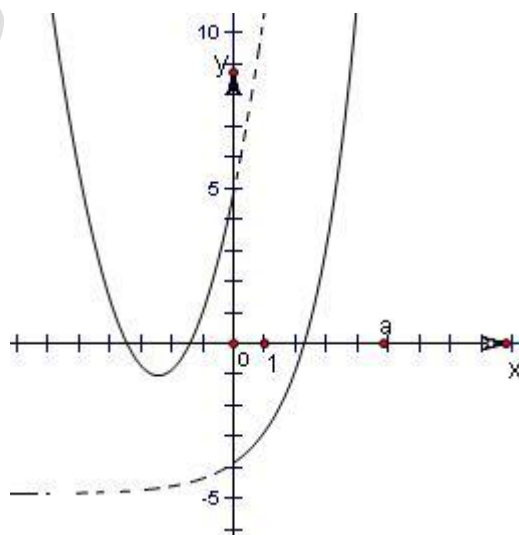
根, 且 $x < 0$ 时, 方程 $x^2 + ax + a = 0$ 有两个根,

即 $\begin{cases} \Delta = a^2 - 4a > 0 \Rightarrow a > 4. \end{cases}$

故实数 a 的取值范围是 $a > 4$.

故答案为: $a > 4$.

由题意可得函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴有三个不同的交点, 结合图象求出实数 a



的取值范围.

本题主要考查函数的零点与方程的根的关系,体现了化归与转化、数形结合的数学思想,属于中档题.

17.【答案】解: (1) 原式= $(\frac{81}{16})^{0.5} - 1 \div (\frac{4}{3})^2 + (\frac{27}{64})^{\frac{2}{3}} = \frac{9}{4} - \frac{9}{16} + \frac{9}{16} = \frac{9}{4} \cdots$ (5分)

(2) 原式= $\log_3 3^{\frac{3}{2}} + \lg \frac{100}{4} + \lg 4 + 2 + 1 = \frac{3}{2} + 2 - \lg 4 + \lg 4 + 3 = \frac{13}{2} \cdots$ (10分)

【解析】

利用有理数指数幂的性质及运算法则求解.

本题考查指数式化简求值,是基础题,解题时要认真审题,注意有理数指数幂的性质及运算法则的合理运用.

18.【答案】解: (1) $f(x) = (\log_3 x - 2)(1 + \log_3 x) = (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2$,

由 $f(x) > 0$,

则 $(\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 > 0$,

解得 $\log_3 x < -1$ 或 $\log_3 x > 2$,

则 $0 < x < \frac{1}{3}$ 或 $x > 9$,

所以不等式的解集为 $(0, \frac{1}{3}) \cup (9, +\infty)$;

(2) $f(x) = (\log_3 x)^2 - \log_3 x - 2 = (\log_3 x - \frac{1}{2})^2 - \frac{9}{4}$,

因为 $x \in [1, 9]$,

所以 $\log_3 x \in [0, 2]$,

当 $\log_3 x = \frac{1}{2}$ 时, $f(x)$ 有最小值为 $-\frac{9}{4}$;

当 $\log_3 x = 2$ 时, $f(x)$ 有最大值为 0,

所以函数 $f(x)$ 的值域为 $[-\frac{9}{4}, 0]$.

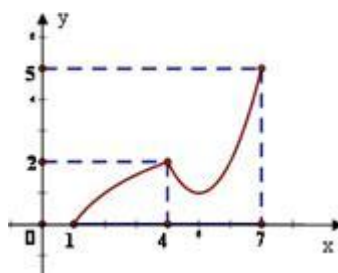
【解析】

此题考查对数函数的性质，考查不等式求解，考查二次函数的性质.

(1) 将函数 $f(x)$ 化为二次函数的形式，解得 $\log_3 x < -1$ 或 $\log_3 x > 2$ ，利用对数函数的性质解答结果；

(2) 利用对数函数的性质得出 $\log_3 x \in [0, 2]$ ，利用二次函数的性质可得函数 $f(x)$ 的值域.

19. 【答案】解： (1)



(2) $f(x)$ 的单调增区间为 $[1, 4]$, $[5, 7]$ (区间端点开闭均可)，值域为 $[0, 5]$;

(3) $[1, 4) \cup (4, 6)$

【解析】

(1) 利用对数函数的图象及二次函数的图象作出 $f(x)$ 的图象.

(2) 结合(1)的图象写出 $f(x)$ 的单调区间及值域.

(3) 结合(1)的图象写出 $f(x) < 2$ 的解集.

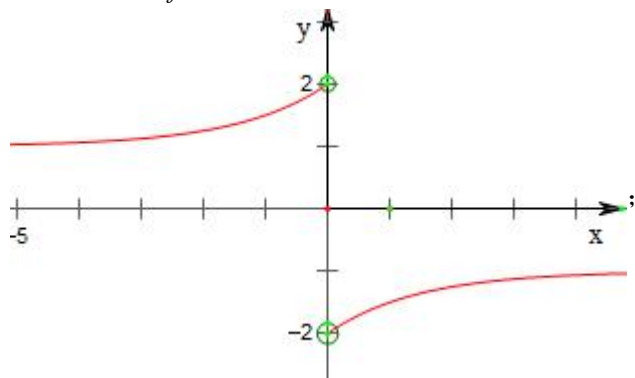
20. 【答案】解： (1) 由题意， $f(0) = 0$,

当 $x > 0$ 时， $-x < 0$,

$$f(x) = -f(-x) = -(1 + 2^{-x})$$

$$\text{故 } f(x) = \begin{cases} 1+2^x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1-2^{-x}, & x > 0 \end{cases};$$

(2) 作函数 $f(x)$ 的图象如下,



(3) 函数 $f(x)$ 单调增区间为 $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$, 其值域为 $(-2, -1) \cup \{0\} \cup (1, 2)$.

【解析】

(1) 由 $y=f(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的奇函数知 $f(0)=0$, 从而求函数 $f(x)$ 的解析式;

(2) 画出函数 $f(x)$ 的图象, 注意空心点及原点;

(3) 由图象写出函数 $f(x)$ 单调区间及值域.

本题考查了函数的解析式的求法及图象的作法, 同时考查了函数的图象的应用, 属于基础题.

21. 【答案】解: (1) 由题意得 $P(x) = 12 + 10x$, ... (1 分)

$$\text{则 } f(x) = Q(x) - P(x) = \begin{cases} -0.5x^2 + 22x - 12 - 10x, & 0 \leq x \leq 16 \\ 224 - 12 - 10x, & x > 16 \end{cases}$$

$$\text{即为 } f(x) = \begin{cases} -0.5x^2 + 12x - 12, & 0 \leq x \leq 16 \\ 212 - 10x, & x > 16 \end{cases} \dots (4 \text{ 分})$$

(2) 当 $x > 16$ 时, 函数 $f(x)$ 递减, 即有 $f(x) < f(16) = 212 - 160 = 52$ 万元 ... 6 分

当 $0 \leq x \leq 16$ 时, 函数 $f(x) = -0.5x^2 + 12x - 12$

$$= -0.5(x-12)^2 + 60,$$

当 $x=12$ 时, $f(x)$ 有最大值 60 万元. ... 9 分

所以当工厂生产 12 百台时, 可使利润最大为 60 万元. ... 10 分

【解析】

(1) 先求得 $P(x)$, 再由 $f(x) = Q(x) - P(x)$, 由分段函数式可得所求;

(2)分别求出各段的最值,注意运用一次函数和二次函数的最值求法,即可得到.

本题考查函数模型在实际问题中的应用,考查函数的最值问题,正确求出分段函数式,求出各段的最值是解题的关键,属于中档题.

22.【答案】解:(1)由题设,需 $f(0)=\frac{-1+a}{2}=0$, $\therefore a=1$,

$$\therefore f(x)=\frac{1-2^x}{1+2^x},$$

经验证, $f(x)$ 为奇函数, $\therefore a=1$.

(2)减函数

证明:任取 $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$,

$$f(x_2) - f(x_1) = \frac{1-2^{x_2}}{1+2^{x_2}} - \frac{1-2^{x_1}}{1+2^{x_1}} = \frac{2(2^{x_1}-2^{x_2})}{(1+2^{x_1})(1+2^{x_2})},$$

$$\because x_1 < x_2 \therefore 0 < 2^{x_1} < 2^{x_2};$$

$$\therefore 2^{x_1} - 2^{x_2} < 0, (1+2^{x_1})(1+2^{x_2}) > 0$$

$$\therefore f(x_2) - f(x_1) < 0$$

$\therefore$ 该函数在定义域 $\mathbb{R}$ 上是减函数.

(3)由 $f(t^2-2t) + f(2t^2-k) < 0$ 得 $f(t^2-2t) < -f(2t^2-k)$,

$\because f(x)$ 是奇函数, $\therefore f(t^2-2t) < f(k-2t^2)$,

由(2)知, $f(x)$ 是减函数

$\therefore$ 原问题转化为 $t^2-2t > k-2t^2$,即 $3t^2-2t-k > 0$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 恒成立,

$$\therefore \Delta = 4 + 12k < 0, \text{得 } k < -\frac{1}{3} \text{即为所求.}$$

(4)原函数零点的问题等价于方程 $f(4^x-b) + f(-2^{x+1}) = 0$

由(3)知, $4^x-b=2^{x+1}$,即方程 $b=4^x-2^{x+1}$ 有解

$$\therefore 4^x-2^{x+1}=(2^x)^2-2 \times 2^x=(2^x-1)^2-1 \geq -1, \therefore \text{当 } b \in [-1, +\infty) \text{ 时函数存在零点.}$$

【解析】

(1)根据奇函数当 $x=0$ 时的函数值为0,列出方程求出 a 的值;

(2)先判断出单调性,再利用函数单调性的定义法进行证明,即取值-作差-变形-判断符号-下结论;

(3)利用函数的奇偶性将不等式转化为函数值比较大小,再由函数的单调性比较自变量的大小,列出不等式由二次函数恒成立进行求解;

(4)根据函数解析式和函数零点的定义列出方程,再利用整体思想求出 b 的范围.

本题考查了函数的奇偶性、单调性的应用，利用奇函数的定义域内有 0 时有 $f(0)=0$ 进行求值，函数单调性的证明必须按照定义法进行证明，即取值-作差-变形-判断符号-下结论，利用二次函数的性质，以及整体思想求出恒成立问题.