

3

第三章 DISANZHANG

导数及其应用

第1节 导数的概念及运算

知识分类落实

回扣知识·夯实基础

知识梳理

1. 函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数

(1) 定义: 设函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 上有定义, 且 $x_0 \in (a, b)$, 若 Δx 无限趋近于 0 时, 比值 $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 无限趋近于一个常数 A , 则称 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导, 并称该常数 A 为函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数, 记作 $f'(x_0)$.

(2) 几何意义: 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 的几何意义是在曲线 $y=f(x)$ 上点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线的斜率. 相应地, 切线方程为 $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

2. 函数 $y=f(x)$ 的导函数

若函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内任意一点都可导, 则 $f(x)$ 在各点的导数也随着 x 的变化而变化, 因而是自变量 x 的函数, 该函数称作 $f(x)$ 的导函数, 记作 $f'(x)$.

若 $f(x)$, $g'(x)$ 存在, 则有:

3. 基本初等函数的导数公式

基本初等函数	导函数
$f(x)=C(C \text{ 为常数})$	$f'(x)=0$
$f(x)=x^\alpha(\alpha \text{ 为常数})$	$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}$
$f(x)=\sin x$	$f'(x)=\cos x$
$f(x)=\cos x$	$f'(x)=-\sin x$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=a^x(a>0, a \neq 1)$	$f'(x)=a^x \ln a$

$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\log_a x (a>0, a\neq 1)$	$f'(x)=\frac{1}{x \ln a}$

4. 导数的运算法则

若 $f'(x)$, $g'(x)$ 存在, 则有:

(1) $[Cf(x)]' = Cf'(x)$ (C 为常数);

(2) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$;

(3) $[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$;

(4) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2} (g(x) \neq 0)$.

5. 复合函数的导数

若 $y=f(u)$, $u=ax+b$, 则 $y'_x = y'_u \cdot u'_x$, 即 $y'_x = y'_u \cdot a$.

●—— 常用结论与微点提醒

1. $f'(x_0)$ 代表函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的导数值; $(f(x_0))'$ 是函数值 $f(x_0)$ 的导数, 且 $(f(x_0))' = 0$.

2. $\left[\frac{1}{f(x)}\right]' = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2} (f(x) \neq 0)$.

3. 曲线的切线与曲线的公共点的个数不一定只有一个, 而直线与二次曲线相切只有一个公共点.

4. 函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 反映了函数 $f(x)$ 的瞬时变化趋势, 其正负号反映了变化的方向, 其大小 $|f'(x)|$ 反映了变化的快慢, $|f'(x)|$ 越大, 曲线在这点处的切线越“陡”.

诊断自测

► 思考辨析

1. 判断下列结论正误(在括号内打“√”或“×”)

(1) $f'(x_0)$ 是函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近的平均变化率. ()

(2) 函数 $f(x)=\sin(-x)$ 的导数 $f'(x)=\cos x$. ()

(3) 求 $f'(x_0)$ 时, 可先求 $f(x_0)$, 再求 $f'(x_0)$. ()

(4) 曲线 $y=f(x)$ 在某点处的切线与曲线 $y=f(x)$ 过某点的切线意义是相同的. ()

答案 (1)× (2)× (3)× (4)×

解析 (1) $f'(x_0)$ 表示 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率, (1) 错.

(2) $f(x)=\sin(-x)=-\sin x$, 则 $f'(x)=-\cos x$, (2)错.

(3)求 $f'(x_0)$ 时, 应先求 $f'(x)$, 再代入求值, (3)错.

(4)“在某点”的切线是指以该点为切点的切线, 因此此点横坐标处的导数值为切线的斜率; 而对于“过某点”的切线, 则该点不一定是切点, 要利用解方程组的思想求切线的方程, 在曲线上某点处的切线只有一条, 但过某点的切线可以不止一条, (4)错.



2. 已知函数 $f(x)=\frac{x}{x+2}$, 则函数在 $x=-1$ 处的切线方程是()

A. $2x-y+1=0$

B. $x-2y+2=0$

C. $2x-y-1=0$

D. $x+2y-2=0$

答案 A

解析 由 $f(x)=\frac{x}{x+2}$, 得 $f'(x)=\frac{2}{(x+2)^2}$,

又 $f(-1)=-1$, $f'(-1)=2$.

因此函数在 $x=-1$ 处的切线方程为 $y+1=2(x+1)$, 即 $2x-y+1=0$.

3. 若曲线 $y=(ax+1)e^x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线的斜率为 -2 , 则 $a=$ _____.

答案 -3

解析 $y'=ae^x+(ax+1)e^x$, 则 $y'|_{x=0}=a+1=-2$, 所以 $a=-3$.



4. (2020 全国 I 卷) 函数 $f(x)=x^4-2x^3$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为()

A. $y=-2x-1$

B. $y=-2x+1$

C. $y=2x-3$

D. $y=2x+1$

答案 B

解析 $f(1)=1-2=-1$, 切点坐标为 $(1, -1)$,

又 $f'(x)=4x^3-6x^2$,

所以切线的斜率 $k=f'(1)=4\times 1^3-6\times 1^2=-2$,

切线方程为 $y+1=-2(x-1)$, 即 $y=-2x+1$. 故选 B.

5. (多选题)(2020 聊城模拟) 若函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 的图象关于 y 轴对称, 则 $f(x)$ 的解析式可能为()

A. $f(x)=3\cos x$

B. $f(x)=x^3+x$

$$C. f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$D. f(x) = e^x + x$$

答案 BC

解析 对于 A, $f(x) = 3\cos x$, 其导数 $f'(x) = -3\sin x$, 其导函数为奇函数, 图象不关于 y 轴对称, 不符合题意; 对于 B, $f(x) = x^3 + x$, 其导数 $f'(x) = 3x^2 + 1$, 其导函数为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 符合题意; 对于 C, $f(x) = x + \frac{1}{x}$, 其导数 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, 其导函数为偶函数, 图象关于 y 轴对称, 符合题意; 对于 D, $f(x) = e^x + x$, 其导数 $f'(x) = e^x + 1$, 其导函数不是偶函数, 图象不关于 y 轴对称, 不符合题意.

6.(2021 连云港检测) 设 $f(x) = \ln(3-2x) + \cos 2x$, 则 $f'(0) =$ _____.

答案 $-\frac{2}{3}$

解析 因为 $f'(x) = -\frac{2}{3-2x} - 2\sin 2x$,

所以 $f'(0) = -\frac{2}{3}$.

考点分层突破

考点聚焦 · 题型剖析

考点一 导数的运算 自主演练

1.(多选题)(2021 济南检测) 下列求导运算正确的是()

$$A. \left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{x \ln^2 x}$$

$$B. (x^2 e^x)' = 2x + e^x$$

$$C. (x \cos x)' = -\sin x$$

$$D. \left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$$

答案 AD

解析 对于 A, $\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{1}{\ln^2 x} (\ln x)' = -\frac{1}{x \ln^2 x}$, 对于 B, $(x^2 e^x)' = (x^2 + 2x)e^x$, 对

于 C, $(x \cos x)' = \cos x - x \sin x$, 对于 D, $\left(x - \frac{1}{x}\right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$.

2. 若 $f(x) = \frac{x^3 + 2x - x^2 \ln x - 1}{x^2}$, 则 $f'(x) =$ _____.

答案 $1 - \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3}$

解析 由已知 $f(x)=x-\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$.

$$\therefore f(x)=1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}.$$

3.(2020 全国 III 卷)设函数 $f(x)=\frac{e^x}{x+a}$.若 $f(1)=\frac{e}{4}$, 则 $a=$ _____.

答案 1

解析 由 $f(x)=\frac{e^x(x+a)-e^x}{(x+a)^2}$, 可得 $f(1)=\frac{ea}{(1+a)^2}=\frac{e}{4}$, 即 $\frac{a}{(1+a)^2}=\frac{1}{4}$, 解得 $a=1$.

4.已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 且满足关系式 $f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x$, 则 $f(1)=$ _____.

答案 $-\frac{23}{4}$

解析 因为 $f(x)=x^2+3xf'(2)+\ln x$,

$$\therefore f'(x)=2x+3f'(2)+\frac{1}{x}.$$

令 $x=2$, 得 $f'(2)=4+3f'(2)+\frac{1}{2}$, 则 $f'(2)=-\frac{9}{4}$.

$$\therefore f(1)=1+3\times 1\times\left(-\frac{9}{4}\right)+0=-\frac{23}{4}.$$

感悟升华 1.求函数的导数要准确地把函数拆分成基本初等函数的和、差、积、商, 再利用运算法则求导.

2.抽象函数求导, 恰当赋值是关键, 然后活用方程思想求解.

3.复合函数求导, 应由外到内逐层求导, 必要时要进行换元.

考点二 导数的几何意义 多维探究

角度 1 求切线的方程

【例 1】(1)曲线 $y=3(x^2+x)e^x$ 在点(0, 0)处的切线方程为_____.

(2)(2020 全国 I 卷)曲线 $y=\ln x+x+1$ 的一条切线的斜率为 2, 则该切线的方程为_____.

答案 (1) $3x-y=0$ (2) $2x-y=0$

解析 (1) $y'=3(2x+1)e^x+3(x^2+x)e^x=3e^x(x^2+3x+1)$,

所以曲线在点(0, 0)处的切线的斜率 $k=e^0\times 3=3$, 所以所求切线方程为 $3x-y=$

0.

(2) 设切点坐标为 (x_0, y_0) ,

因为 $y = \ln x + x + 1$, 所以 $y' = \frac{1}{x} + 1$,

所以切线的斜率为 $\frac{1}{x_0} + 1 = 2$, 解得 $x_0 = 1$.

所以 $y_0 = \ln 1 + 1 + 1 = 2$, 即切点坐标为 $(1, 2)$,

所以切线方程为 $y - 2 = 2(x - 1)$, 即 $2x - y = 0$.

角度 2 求曲线的切点坐标

【例 2】(2019 江苏卷改编) 在平面直角坐标系 xOy 中, 点 A 在曲线 $y = \ln x$ 上, 且该曲线在点 A 处的切线经过点 $(-e, -1)$ (e 为自然对数的底数), 则点 A 的坐标是_____, 此时切线方程为_____.

答案 $(e, 1) \quad x - ey = 0$

解析 设 $A(m, n)$, 则曲线 $y = \ln x$ 在点 A 处的切线方程为 $y - n = \frac{1}{m}(x - m)$.

又切线过点 $(-e, -1)$, 所以有 $n + 1 = \frac{1}{m}(m + e)$.

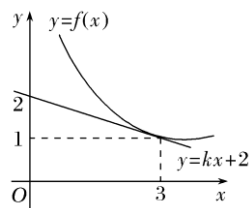
再由 $n = \ln m$, 解得 $m = e, n = 1$.

故点 A 的坐标为 $(e, 1)$,

切线方程为 $x - ey = 0$.

角度 3 导数与函数图象问题

【例 3】 已知 $y = f(x)$ 是可导函数, 如图, 直线 $y = kx + 2$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 3$ 处的切线, 令 $g(x) = xf(x)$, $g'(x)$ 是 $g(x)$ 的导函数, 则 $g'(3) =$ _____.



答案 0

解析 由题图可知曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 3$ 处切线的斜率等于 $-\frac{1}{3}$, $\therefore f'(3) = -\frac{1}{3}$.

$\because g(x) = xf(x), \therefore g'(x) = f(x) + xf'(x)$,

$\therefore g'(3) = f(3) + 3f'(3)$, 又由题意可知 $f(3) = 1$,

$\therefore g'(3) = 1 + 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$.

感悟升华 1. 求曲线在点 $P(x_0, y_0)$ 处的切线, 则表明 P 点是切点, 只需求出函数

在 P 处的导数, 然后利用点斜式写出切线方程, 若在该点 P 处的导数不存在, 则切线垂直于 x 轴, 切线方程为 $x = x_0$.

2. 求曲线的切线方程要分清“在点处”与“过点处”的切线方程的不同. 切点坐标不知道, 要设出切点坐标, 根据斜率相等建立方程(组)求解, 求出切点坐标是解题的关键.

【训练 1】 (1)(2021 南京诊断) 已知 $f(x)$ 是奇函数, 且当 $x > 0$ 时, $f(x) = e^x - 1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x = -1$ 处的切线方程为

()

A. $ex - y + 1 = 0$

B. $ex + y - 1 = 0$

C. $ex - y - 1 = 0$

D. $ex + y + 1 = 0$

(2)(2020 长沙检测) 如图所示, $y = f(x)$ 是可导函数, 直线 $l: y =$

$kx + 3$ 是曲线 $y = f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线, 令 $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, $h'(x)$

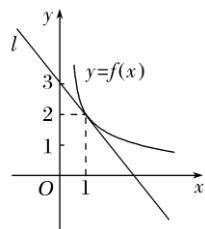
是 $h(x)$ 的导函数, 则 $h'(1)$ 的值是()

A. 2

B. 1

C. -1

D. -3



答案 (1)A (2)D

解析 (1) 令 $x < 0$, 则 $-x > 0$, 则 $f(-x) = e^{-x} - 1$, 因为 $f(x)$ 是奇函数,

所以 $f(x) = -f(-x) = -e^{-x} + 1$, $x < 0$,

所以 $f'(x) = e^{-x}$,

因此 $f(-1) = -e + 1$, $f'(-1) = e$.

故切线方程为 $y - (1 - e) = e(x + 1)$, 即 $ex - y + 1 = 0$.

(2) 由图象知, 直线 l 经过点 $(1, 2)$.

则 $k + 3 = 2$, $k = -1$, 从而 $f(1) = -1$, 且 $f(1) = 2$,

由 $h(x) = \frac{f(x)}{x}$, 得 $h'(x) = \frac{xf'(x) - f(x)}{x^2}$,

所以 $h'(1) = f'(1) - f(1) = -1 - 2 = -3$.

考点三 导数几何意义的应用 师生共研

【例 4】 (1)(多选题)(2021 厦门质检) 已知函数 $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$, 若 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 和 $x = x_2 (x_1 \neq x_2)$ 处切线平行, 则()

A. $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2}$

B. $x_1 x_2 < 128$

$$C. x_1 + x_2 < 32$$

$$D. x_1^2 + x_2^2 > 512$$

(2)(2020·盐城质检)已知函数 $f(x) = ae^x (a > 0)$ 与 $g(x) = 2x^2 - m (m > 0)$ 的图象在第一象限有公共点, 且在该点处的切线相同, 当实数 m 变化时, 实数 a 的取值范围为 ()

$$A. \left(\frac{4}{e^2}, +\infty\right)$$

$$B. \left(\frac{8}{e^2}, +\infty\right)$$

$$C. \left(0, \frac{4}{e^2}\right)$$

$$D. \left(0, \frac{8}{e^2}\right)$$

答案 (1)AD (2)D

解析 (1)由题意知 $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} (x > 0)$, 因为 $f(x)$ 在 $x = x_1$ 和 $x = x_2 (x_1 \neq x_2)$ 处切线平行, 所以 $f'(x_1) = f'(x_2)$, 即 $\frac{1}{2\sqrt{x_1}} - \frac{1}{x_1} = \frac{1}{2\sqrt{x_2}} - \frac{1}{x_2}$, 化简得 $\frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} = \frac{1}{2}$, 故 A 正确; 由基本不等式及 $x_1 \neq x_2$ 可得, $\frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{x_1}} + \frac{1}{\sqrt{x_2}} > 2\sqrt{\frac{1}{\sqrt{x_1}x_2}}}$, 即 $x_1x_2 > 256$, 故 B 错误; $x_1 + x_2 > 2\sqrt{x_1x_2} > 32$, 故 C 错误; $x_1^2 + x_2^2 > 2x_1x_2 > 512$, 故 D 正确. 故选 AD.

(2)设在第一象限的切点为 $A(x_0, y_0)$,

$$\text{所以 } \begin{cases} ae^{x_0} = 2x_0^2 - m, \\ ae^{x_0} = 4x_0, \end{cases} \text{ 整理得 } \begin{cases} 4x_0 = 2x_0^2 - m, \\ x_0 > 0, \\ m > 0, \end{cases}$$

由 $m = 2x_0^2 - 4x_0 > 0$ 和 $x_0 > 0$, 解得 $x_0 > 2$.

由上可知 $a = \frac{4x_0}{e^{x_0}}$, 令 $h(x) = \frac{4x}{e^x}$, $x > 2$,

$$\text{则 } h'(x) = \frac{4(1-x)}{e^x}.$$

因为 $x > 2$, 所以 $h'(x) = \frac{4(1-x)}{e^x} < 0$,

$h(x) = \frac{4x}{e^x}$ 在 $(2, +\infty)$ 上单调递减,

所以 $0 < h(x) < \frac{8}{e^2}$, 即 $a \in \left(0, \frac{8}{e^2}\right)$.

感悟升华 1. 处理与切线有关的参数问题, 通常根据曲线、切线、切点的三个关系列出参数的方程(组)并解出参数: (1)切点处的导数是切线的斜率; (2)切点在切线上; (3)切点在曲线上.

2.利用导数的几何意义求参数范围时,注意化归与转化思想的应用.

【训练2】(1)(2021 宿迁检测)函数 $f(x)=\ln x-ax$ 在 $x=2$ 处的切线与直线 $ax-y-1=0$ 平行,则实数 $a=(\quad)$

- A. -1 B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

(2)若函数 $y=2x^3+1$ 与 $y=3x^2-b$ 的图象在一个公共点处的切线相同,则实数 b =_____.

答案 (1)B (2)0 或 -1

解析 (1) $\because f(x)=\ln x-ax, \therefore f'(x)=\frac{1}{x}-a$.

$\therefore$ 曲线 $y=f(x)$ 在 $x=2$ 处切线的斜率 $k=f'(2)$,

因此 $\frac{1}{2}-a=a, \therefore a=\frac{1}{4}$.

(2)设公共切点的横坐标为 x_0 , 函数 $y=2x^3+1$ 的导函数为 $y'=6x^2$, $y=3x^2-b$ 的导函数为 $y'=6x$, 由图象在一个公共点处的切线相同, 可得 $6x_0^2=6x_0$ 且 $1+2x_0^3=3x_0^2-b$, 解得 $x_0=0, b=-1$ 或 $x_0=1, b=0$. 故实数 $b=0$ 或 -1 .

课后巩固作业

分层训练·提升能力

A 级 基础巩固

一、选择题

1.(多选题)下列求导数的运算中正确的是()

- A. $(3^x)'=3^x \ln 3$ B. $(x^2 \ln x)'=2x \ln x + x$
C. $\left(\frac{\cos x}{x}\right)'=\frac{x \sin x - \cos x}{x^2}$ D. $(\sin x \cos x)'=\cos 2x$

答案 ABD

解析 因为 $\left(\frac{\cos x}{x}\right)'=\frac{-x \sin x - \cos x}{x^2}$, C 项错误. 其余项均正确.

2.(2021 南京师大附中月考)曲线 $y=\frac{x+1}{x-1}$ 在点(3, 2)处的切线的斜率是()

- A. 2 B. -2 C. $\frac{1}{2}$ D. $-\frac{1}{2}$

答案 D

解析 $y'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}$

$$= -\frac{2}{(x-1)^2},$$

故曲线在点(3, 2)处的切线的斜率

$$k=y'|_{x=3}=-\frac{2}{(3-1)^2}=-\frac{1}{2}.$$

3.若函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 且 $f(x)=x^2+2f'(1)x+3$, 则()

- A. $f(0)<f(4)$ B. $f(0)=f(4)$
C. $f(0)>f(4)$ D. 以上都不对

答案 B

解析 函数 $f(x)$ 的导数 $f'(x)=2x+2f'(1)$,

令 $x=1$, 得 $f'(1)=2+2f'(1)$, 即 $f'(1)=-2$,

故 $f(x)=x^2-4x+3=(x-2)^2-1$,

所以 $f(0)=f(4)=3$.

4.(2020 豫北十校联考)已知 $f(x)=x^2$, 则过点 $P(-1, 0)$, 曲线 $y=f(x)$ 的切线方程为()

- A. $y=0$ B. $4x+y+4=0$
C. $4x-y+4=0$ D. $y=0$ 或 $4x+y+4=0$

答案 D

解析 易知点 $P(-1, 0)$ 不在 $f(x)=x^2$ 上,

设切点坐标为 (x_0, x_0^2) , 由 $f(x)=x^2$ 可得 $f'(x)=2x$,

$\therefore$ 切线的斜率 $k=f'(x_0)=2x_0$.

$\because$ 切线过点 $P(-1, 0)$,

$\therefore k=\frac{x_0^2}{x_0+1}=2x_0$, 解得 $x_0=0$ 或 $x_0=-2$,

$\therefore k=0$ 或 -4 ,

故所求切线方程为 $y=0$ 或 $4x+y+4=0$.

5.(2021 长沙模拟)若直线 $y=ax$ 与曲线 $y=\ln x-1$ 相切, 则 $a=()$

- A. e B. 1 C. $\frac{1}{e}$ D. $\frac{1}{e^2}$

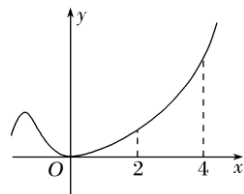
答案 D

解析 由 $y=\ln x-1$, 得 $y'=\frac{1}{x}$, 设切点为 $(x_0, \ln x_0-1)$,

$$\text{则} \begin{cases} ax_0 = \ln x_0 - 1, \\ a = \frac{1}{x_0}, \end{cases} \quad \text{解得 } a = \frac{1}{e^2}.$$

6. 已知函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上可导, 其部分图象如图所示, 设

$$\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = a, \text{ 则下列不等式正确的是()}$$



A. $a < f'(2) < f'(4)$

B. $f'(2) < a < f'(4)$

C. $f(4) < f'(2) < a$

D. $f'(2) < f'(4) < a$

答案 B

解析 由函数 $f(x)$ 的图象可知, 在 $[0, +\infty)$ 上, 函数值的增长越来越快, 故该函数图象在 $[0, +\infty)$ 上的切线斜率也越来越大.

因为 $\frac{f(4) - f(2)}{4 - 2} = a$, 所以 $f'(2) < a < f'(4)$.

7. (2021 南通调研) 若函数 $f(x) = \ln x + 2x^2 - ax$ 的图象上存在与直线 $2x - y = 0$ 平行的切线, 则实数 a 的取值范围是()

A. $(-\infty, -6]$

B. $(-\infty, -6] \cup [2, +\infty)$

C. $[2, +\infty)$

D. $(-\infty, -6) \cup (2, +\infty)$

答案 C

解析 直线 $2x - y = 0$ 的斜率 $k = 2$,

又曲线 $f(x)$ 上存在与直线 $2x - y = 0$ 平行的切线,

$$\therefore f'(x) = \frac{1}{x} + 4x - a = 2 \text{ 在 } (0, +\infty) \text{ 内有解,}$$

$$\text{则 } a = 4x + \frac{1}{x} - 2, \quad x > 0.$$

$$\text{又 } 4x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{1}{x}} = 4, \text{ 当且仅当 } x = \frac{1}{2} \text{ 时取 “=”}.$$

$$\therefore a \geq 4 - 2 = 2.$$

8. (多选题) (2021 淄博调研) 已知函数 $f(x)$ 及其导函数 $f'(x)$, 若存在 $x_0 \in \mathbf{R}$ 使得 $f(x_0) = f'(x_0)$, 则称 x_0 是 $f(x)$ 的一个“巧值点”. 下列选项中有“巧值点”的函数是()

A. $f(x) = x^2$

B. $f(x) = e^{-x}$

C. $f(x) = \ln x$

D. $f(x) = \tan x$

答案 AC

解析 若 $f(x)=x^2$, 则 $f'(x)=2x$, 令 $x^2=2x$, 得 $x=0$ 或 $x=2$, 方程显然有解, 故 A 符合要求; 若 $f(x)=e^{-x}$, 则 $f'(x)=-e^{-x}$, 令 $e^{-x}=-e^{-x}$, 此方程无解, 故 B 不符合要求; 若 $f(x)=\ln x$, 则 $f'(x)=\frac{1}{x}$, 令 $\ln x=\frac{1}{x}$, 在同一直角坐标系内作出函数 $y=\ln x$ 与 $y=\frac{1}{x}$ 的图象(作图略), 可得两函数的图象有一个交点, 所以方程 $f(x)=f'(x)$ 存在实数解, 故 C 符合要求; 若 $f(x)=\tan x$, 则 $f'(x)=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{1}{\cos^2 x}$, 令 $\tan x=\frac{1}{\cos^2 x}$, 化简得 $\sin x \cos x=1$, 变形可得 $\sin 2x=2$, 无解, 故 D 不符合要求. 故选 AC.

二、填空题

9. 曲线 $y=\cos x-\frac{x}{2}$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程为_____.

答案 $x+2y-2=0$

解析 $y'=-\sin x-\frac{1}{2}$, 将 $x=0$ 代入,

可得切线斜率为 $-\frac{1}{2}$.

所以切线方程为 $y-1=-\frac{1}{2}x$, 即 $x+2y-2=0$.

10. (2020 江南十校联考) 函数 $f(x)=(2x-1)e^x$ 的图象在点 $(0, f(0))$ 处的切线的倾斜角为_____.

答案 $\frac{\pi}{4}$

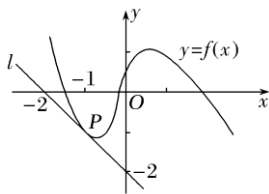
解析 由 $f(x)=(2x-1)e^x$, 得 $f'(x)=(2x+1)e^x$,

$\therefore f'(0)=1$, 则切线的斜率 $k=1$,

又切线倾斜角 $\theta \in [0, \pi)$,

因此切线的倾斜角 $\theta=\frac{\pi}{4}$.

11. (2020 济南检测) 曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(-1, f(-1))$ 处的切线 l 如图所示, 则 $f(-1)+f'(-1)=$ _____.



答案 -2

解析 $\because$ 直线 l 过点 $(-2, 0)$ 和 $(0, -2)$,

$\therefore$ 直线 l 的斜率 $f'(-1) = \frac{0+2}{-2-0} = -1$, 直线 l 的方程为 $y = -x - 2$.

则 $f(-1) = 1 - 2 = -1$.

故 $f'(-1) + f(-1) = -1 - 1 = -2$.

12. 已知直线 $y = \frac{1}{m}$ 是曲线 $y = xe^x$ 的一条切线, 则实数 m 的值为_____.

答案 -e

解析 设切点坐标为 $(n, \frac{1}{m})$,

由 $y = xe^x$, 得 $y' = (xe^x)' = e^x + xe^x$.

若直线 $y = \frac{1}{m}$ 是曲线 $y = xe^x$ 的一条切线,

$y'|_{x=n} = e^n + ne^n = 0$, 解得 $n = -1$,

因此 $\frac{1}{m} = ne^n = -\frac{1}{e}$, 故 $m = -e$.

B 级 能力提升

13. 若曲线 $y = e^x$ 在 $x = 0$ 处的切线也是曲线 $y = \ln x + b$ 的切线, 则 $b = (\quad)$

A. -1 B. 1 C. 2 D. e

答案 C

解析 $y = e^x$ 的导数为 $y' = e^x$, 则曲线 $y = e^x$ 在 $x = 0$ 处的切线斜率 $k = 1$,

则曲线 $y = e^x$ 在 $x = 0$ 处的切线方程为 $y - 1 = x$, 即 $y = x + 1$.

设 $y = x + 1$ 与 $y = \ln x + b$ 相切的切点为 $(m, m + 1)$.

又 $y' = \frac{1}{x}$, 则 $\frac{1}{m} = 1$, 解得 $m = 1$. 所以切点坐标为 $(1, 2)$,

则 $2 = b + \ln 1$, 得 $b = 2$.

14. (多选题)(2020·重庆抽测) 若函数 $y = f(x)$ 的图象上存在不同的两点, 使得函数的图象在这两点处的切线的斜率之和等于常数 t , 则称函数 $y = f(x)$ 为“ t 函数”. 下

列函数中可以称为“2函数”的是()

A. $y=x-x^3$

B. $y=x+e^x$

C. $y=x\ln x$

D. $y=x+\cos x$

答案 CD

解析 设切点的横坐标分别为 x_1, x_2 , 对于 A, $y'=1-3x^2$, 所以两条切线的斜率之和为 $2-3(x_1^2+x_2^2)$, 由于 x_1, x_2 不能同时为零, 所以 $2-3(x_1^2+x_2^2)<2$, 不符合题意; 对于 B, $y'=1+e^x$, 所以两条切线的斜率之和为 $2+e^{x_1}+e^{x_2}>2$, 不符合题意; 对于 C, $y'=\ln x+1$, 所以两条切线的斜率之和为 $2+\ln x_1+\ln x_2=2+\ln(x_1x_2)$, 当 x_1, x_2 互为倒数时, 两切线的斜率之和为 2, 符合题意; 对于 D, $y'=1-\sin x$, 所以两条切线的斜率之和为 $2-\sin x_1-\sin x_2$, 当 $\sin x_1+\sin x_2=0$, 即 $x_1=2k\pi-x_2$ 或 $x_1=2\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi+x_2(k\in\mathbf{Z})$ 时, 两条切线的斜率之和为 2, 符合题意. 综上所述, 故选 CD.

15.(2021 武汉调研)若曲线 $y=2\sqrt{x}$ 与函数 $f(x)=ae^x$ 在公共点处有相同的切线, 则实数 a 的值为_____.

答案 $\frac{\sqrt{2e}}{e}$

解析 由 $y=2\sqrt{x}$, 得 $y'=\frac{1}{\sqrt{x}}$, 且 $f'(x)=ae^x$,

设两曲线的公共点为 (x_0, y_0) ,

$$\text{则} \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x_0}}=ae^{x_0}, \\ 2\sqrt{x_0}=ae^{x_0}, \end{cases} \text{所以} \begin{cases} x_0=\frac{1}{2}, \\ a=\frac{\sqrt{2e}}{e}. \end{cases}$$

16. 曲线 $y=x^2-\ln x$ 上的点到直线 $x-y-2=0$ 的最短距离是_____.

答案 $\sqrt{2}$

解析 设曲线在点 $P(x_0, y_0)(x_0>0)$ 处的切线与直线 $x-y-2=0$ 平行,

$$\text{则 } y'|_{x=x_0}=\left(2x-\frac{1}{x}\right)|_{x=x_0}=2x_0-\frac{1}{x_0}=1.$$

$\therefore x_0=1, y_0=1$, 则 $P(1, 1)$,

$$\text{则曲线 } y=x^2-\ln x \text{ 上的点到直线 } x-y-2=0 \text{ 的最短距离 } d=\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=$$

$$\sqrt{2}.$$