2021年4月新高考适应性考试试题

高 三 数 学

2021.04

注意事项：

1．本试卷考试时间为120分钟，试卷满分150分，考试形式闭卷.

2．本试卷中所有试题必须作答在答题卡上规定的位置，否则不给分.

3．答题前，务必将自己的姓名、准考证号等信息用黑色墨水签字笔填写在答题卡的相应位置.

一、单项选择题(本大题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的选项中，只有一项符合要求)．

1．已知集合 $M=\left\{x \mid \sqrt{x-1}<2\right\}$，$N=\left\{x \mid \frac{2}{x}>1\right\}$，则 $M\cap N=$（　　）

A．$\{x \mid x<2\}$　　B．$\{x \mid 1\le x<2\}$　　C．$\{x \mid 1\le x<5\}$　　D．$\{x \mid 0<x<2\}$

2．若复数 z 满足 $z(3+4i)=5i$（i是虚数单位），则 $|z|=$（　　）

A．1　　B．$\frac{1}{2}$　　C．5　　D．$\frac{1}{5}$

3．已知 $a=\sin 2$，$b=\log_2 \sin 2$，$c=2^{\sin 2}$，则 a,b,c 的大小关系是（　　）

A．$a>b>c$　　B．$c>a>b$　　C．$b>a>c$　　D．$c>b>a$

4．甲、乙、丙、丁、戊5名党员参加"党史知识竞赛"，决出第一名到第五名的名次（无并列名次），已知甲排第三，乙不是第一，丙不是第五．据此推测5人的名次排列情况共有（　　）种

A．5　　B．8　　C．14　　D．21

5．定义在R上的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，且 $f(-1)=1$，则不等式

$f(\lg x)-f(\lg\frac{1}{x})>2$ 的解集为（　　）

A．$(-\infty,10)$　　B．$(0,10)$　　C．$(\frac{1}{10},10)$　　D．$(0,\frac{1}{10})$

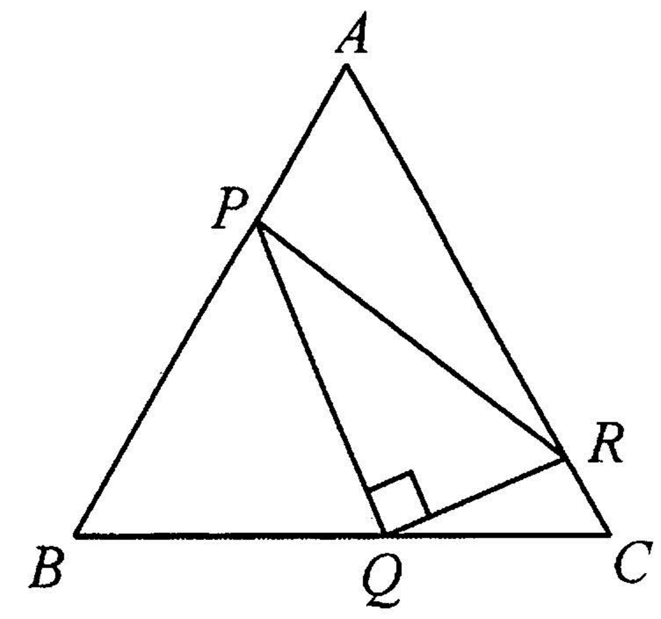
6. 今天是星期三，经过7天后还是星期三，那么经过 8^{2021} 天后是(　　)

A. 星期二　　B. 星期三　　C. 星期四　　D. 星期五

7．将正整数12分解成两个正整数的乘积有1×12，2×6，3×4三种，其中3×4是这三种分解中两数差的绝对值最小的，我们称3×4为12的最佳分解.当$p\times q$ ($p,q\in\mathrm{N}^*$)是正整数n的最佳分解时，我们定义函数$f(n)=|p-q|$，例如$f(12)=|4-3|=1$，则$\sum\limits_{i=1}^{2021}f(2^i)=$（　　）

A．$2^{1011}-1$　　B．2^{1011}　　C．$2^{1010}-1$　　D．2^{1010}

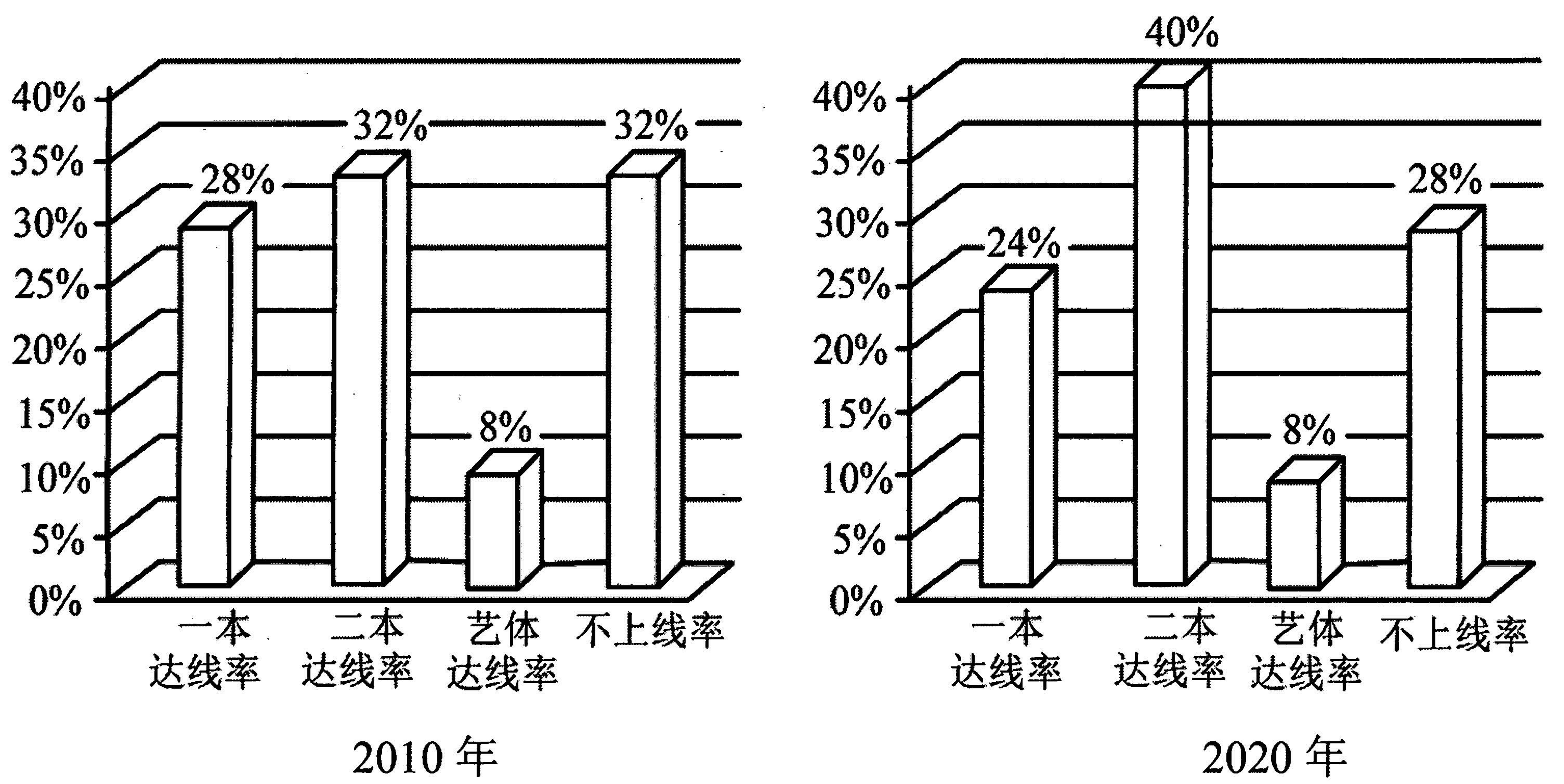
8．如图，直角三角形PQR的三个顶点分别在等边三角形ABC的边AB、BC、CA上，且$PQ=2\sqrt{3}$，$QR=2$，$\angle PQR=\dfrac{\pi}{2}$，则$AB$长度的最大值为（　　）



A．$\dfrac{10\sqrt{3}}{3}$　　B．6　　C．$\dfrac{4\sqrt{21}}{3}$　　D．$\dfrac{8\sqrt{6}}{3}$

二、多项选择题(本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求.全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分)

9．某高中2020年的高考考生人数是2010年高考考生人数的1.5倍，为了更好地比较该校考生的升学情况，统计了该校2010年和2020年的高考升学率，得到如下柱状图：



则下列说法中正确的有(　　)

A．与2010年相比，2020年一本达线人数有所减少

B．2020年二本达线率是2010年二本达线率的1.25倍

C．2010年与2020年艺体达线人数相同

D．与2010年相比，2020年不上线的人数有所增加

10．已知 x_1,x_2 是函数 $f(x)=2\sin(\omega x-\frac{\pi}{6})\ (\omega>0)$ 的两个不同零点，且 $|x_1-x_2|$ 的最小值是 $\frac{\pi}{2}$，则下列说法中正确的有(　　)

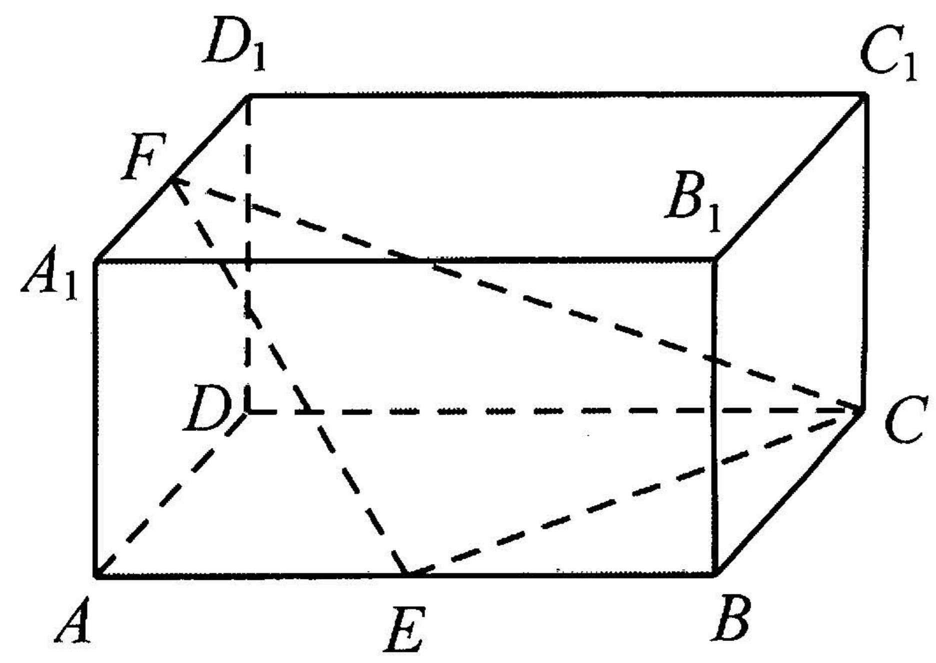
A. 函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{\pi}{3}]$ 上是增函数

B. 函数 $f(x)$ 的图像关于直线 $x=-\frac{\pi}{6}$ 对称

C. 函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(\pi,0)$ 中心对称

D. 当 $x\in[\frac{\pi}{2},\pi]$ 时，函数 $f(x)$ 的值域是 $[-2,1]$

11．如图，在长方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=4$，$BC=BB_1=2$，E、F 分别为棱 AB、A_1D_1 的中点，则下列说法中正确的有(　　)



A. $DB_1\perp CE$

B. 三棱锥 $D-CEF$ 的体积为 $\frac{8}{3}$

C. 若 P 是棱 C_1D_1 上一点，且 $D_1P=1$，则 E、C、P、F 四点共面

D. 平面 CEF 截该长方体所得的截面为五边形

12．17 世纪初，约翰·纳皮尔为了简化计算而发明了对数. 对数的发明是数学史上的重大事件，恩格斯曾经把笛卡尔的坐标系、纳皮尔的对数、牛顿和莱布尼兹的微积分共同称为 17 世纪的三大数学发明. 我们知道，任何一个正实数 N 可以表示成 $N=a\times10^n(1\le a<10,n\in\mathbf{Z})$ 的形式，两边取常用对数，则有 $\lg N=n+\lg a$，现给出部分常用对数值（如下表），则下列说法中正确的有(　　)

真数 x	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\lg x$ (近似值)	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1.000
真数 x	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\lg x$ (近似值)	1.041	1.079	1.114	1.146	1.176	1.204	1.230	1.255	1.279

A. 3^{10} 在区间 $(10^4,10^5)$ 内

B. 2^{50} 是 15 位数

C. 若 $2^{-50}=a\times10^m(1\le a<10,m\in\mathbf{Z})$，则 $m=-16$

D. 若 m^{32} ($m\in\mathbf{N}^*$)是一个 35 位正整数，则 $m=12$

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．已知两个单位向量$\vec{a}$、$\vec{b}$满足$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$，则$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为____________.

14．已知F为双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右焦点，过$F$作与$x$轴垂直的直线交双曲线于$A,B$两点，若以$AB$为直径的圆过坐标原点，则该双曲线的离心率为____________.

15．写出一个值域为$[1,2]$的周期函数$f(x)=$____________.

16．已知正四棱锥$S-ABCD$的底面边长为2，侧棱长为$\sqrt{10}$，其内切球与两侧面SAB,SAD分别切于点P,Q，则PQ的长度为____________.

四、解答题（本大题共 6 小题，计 70 分．解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 10 分）

已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_2=3$，其前n项和S_n满足$S_{n+1}+S_{n-1}=2S_n+2\left(n\geq 2,n\in\mathrm{N}^*\right)$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式;

（2）若$b_n=a_n+2^{a_n}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和T_n.

18.（本小题满分 12 分）

在ΔABC中，角A,B,C的对边分别为a,b,c，且$a<b<c$，现有三个条件:

①a,b,c为连续自然数； ②$c=3a$； ③$C=2A$.

（1）从上述三个条件中选出两个，使得ΔABC不存在，并说明理由（写出一组作答即可）;

（2）从上述三个条件中选出两个，使得ΔABC存在，并求a的值.

19.（本小题满分 12 分）

某观影平台为了解观众对最近上映的某部影片的评价情况（评价结果仅有“好评”、“差评”），从平台所有参与评价的观众中随机抽取 216 人进行调查，部分数据如下表所示（单位：人）：

	好评	差评	合计
男性		68	108
女性	60		
合计			216

（1）请将 2×2 列联表补充完整，并判断是否有 99%的把握认为“对该部影片的评价与性别有关”？

（2）若将频率视为概率，从观影平台的所有给出“好评”的观众中随机抽取 3 人，用随机变量 X 表示被抽到的男性观众的人数，求 X 的分布列；

（3）在抽出的 216 人中，从给出“好评”的观众中利用分层抽样的方法抽取 10 人，从给出“差评”的观众中抽取 m（$m\in\mathbf{N}^*$）人. 现从这 $(10+m)$ 人中，随机抽出 2 人，用随机变量 Y 表示被抽到的给出“好评”的女性观众的人数. 若随机变量 Y 的数学期望不小于 1，求 m 的最大值.

参考公式： $\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$，其中 $n=a+b+c+d$.

参考数据：

$P(\chi^2\geqslant x_0)$	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.001
x_0	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.828

20．（本小题满分 12 分）

图 1 是由正方形 $ABCD$，$\mathrm{Rt}\Delta ABE$，$\mathrm{Rt}\Delta CDF$ 组成的一个等腰梯形，其中 $AB=2$，将 ΔABE、ΔCDF 分别沿 AB, CD 折起使得 E 与 F 重合，如图 2.

（1）设平面 $ABE \cap$ 平面 $CDE = l$，证明：$l // CD$；

（2）若二面角 $A-BE-D$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，求 AE 长.

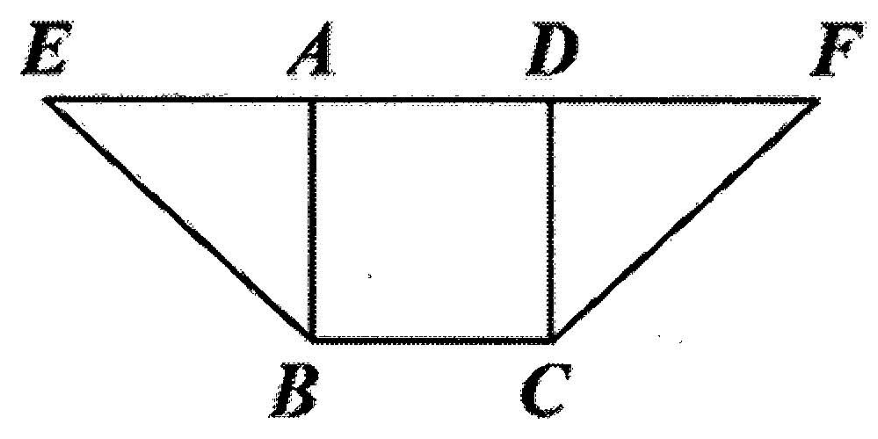


图1

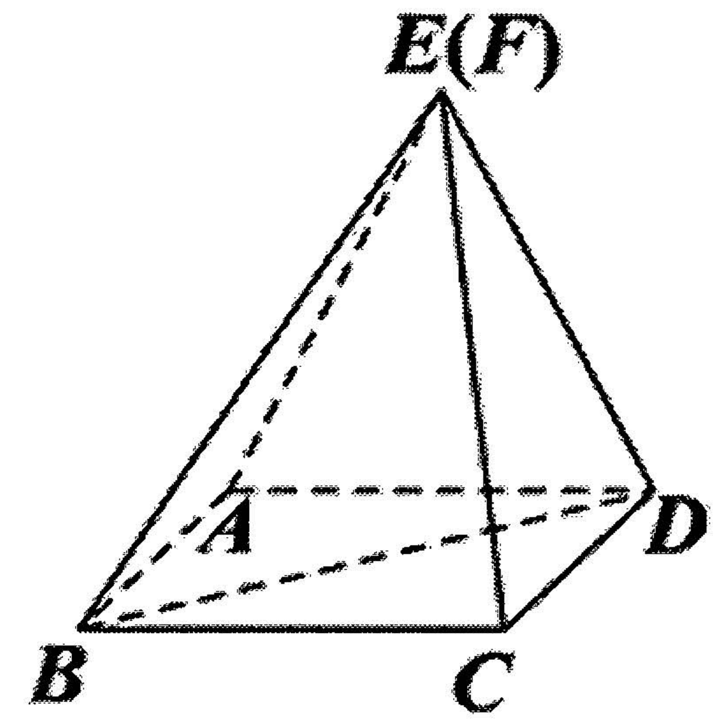


图2

21．（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

（1）若直线 $y=kx-1$ 是曲线 $y=f(x)$ 的切线，求实数 k 的值；

（2）若对任意 $x\in(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\le ax-1-\dfrac{\ln a}{x}$ 成立，求实数 a 的取值集合.

22．（本小题满分 12 分）

已知椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F，过 F 的直线 $x-4\sqrt{3}y+\sqrt{3}=0$ 与椭圆在第一象限交于 M 点，O 为坐标原点，三角形 MFO 的面积为 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）若 ΔABC 的三个顶点 A,B,C 都在椭圆上，且 O 为 ΔABC 的重心，判断 ΔABC 的面积是否为定值，并说明理由.