问题作引领　探究释惑疑*

——“圆锥曲线的统一定义”教学实录与思考

花　奎　（江苏省仪征中学　211400）

作者简介：花奎，江苏仪征人，大学本科．江苏省高中数学特级教师，中学正高级教师．近年来，在《上海教育科研》《数学通报》等刊物发表文章 40 余篇，其中有多篇文章被中国人民大学书报资料中心全文转载．在长期的教学实践中，逐渐形成了“问题驱动、自然变式、微型探究”的教学模式．

1　基本情况

1.1　教材分析

所用教材为《普通高中课程标准实验教科书·数学（选修 2-1）》（苏教版）．本节课为第 2 章第 2.5 节“圆锥曲线的统一定义”．圆锥曲线在现实世界、社会生活中有着广泛的应用，因此圆锥曲线是一个很重要的数学模型．本章先从整体上认识圆锥曲线概念，了解椭圆、双曲线、抛物线的内在关系，再通过统一定义从总体上进一步认识 3 种圆锥曲线的关系．“圆锥曲线的统一定义”从更高的层次上揭示了圆锥曲线之间的内在联系，使学生充分感受数学的内在的、和谐的美，并且通过对研究过程的反思，培养欣赏美、发现美的能力和意识，提高数学审美能力．

1.2　学情分析

学生此前已研究了 3 种圆锥曲线的几何性质，并建构了研究 3 种曲线的方法体系，本节课将通过对 3 种圆锥曲线的共同特性的研究建立统一的定义，从知识上完善圆锥曲线的定义，从研究方法上系统领会解析几何的研究思路．笔者所任教班级的学生来自四星级高中普通班，基础较好，有一定的问题意识、探究能力、推理能力及运算能力．在平时的教学中，就有学生提出能否将 3 种圆锥曲线统一定义．基于此，本节课笔者想让学生在经历“问题提出、提出猜想、验证猜想、应用结论”的微型探究教学活动中培养数学素养，养成良好的思维习惯．

1.3　教学目标

（1）了解圆锥曲线的统一定义；理解圆锥曲线的准线的概念，掌握标准方程下的圆锥曲线准线方程；（2）经历“问题提出、提出猜想、验证猜想、应用结论”的数学探究活动，体验圆锥曲线的之间的内在联系，提升欣赏美、发现美的能力，感受数学发现和创造的快乐．

1.4　教学重点、难点

重点：圆锥曲线统一定义的生成、理解、应用；难点：圆锥曲线的统一定义的生成．

2　教学过程

2.1　创设情境，提出中心问题

古希腊数学家阿波罗尼斯采用平面切割圆锥（图 1）的方法研究了圆及椭圆、双曲线、抛物线．由于椭圆、双曲线、抛物线均是平面截圆锥而得到，教材中将这三类曲线定义为圆锥曲线．（让学生观看用平面切割圆锥的动画）

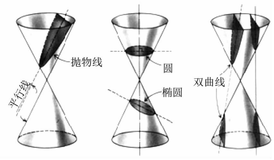

图 1

提出中心问题：椭圆、双曲线、抛物线既然都叫圆锥曲线，从整体、统一、和谐的角度思考，它们是否有一个统一的定义呢？

2.2　定义比较，提出猜想

问题 1　比较椭圆、双曲线、抛物线的定义，它们有相似和相异之处吗？

（1）平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数（大于 F_1F_2）的点的轨迹叫作椭圆．

（2）平面内到两个定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值等于常数（小于 F_1F_2）的点的轨迹叫作双曲线．

（3）平面内到一个定点 F 和一条定直线 l（F 不在 l 上）的距离相等的点的轨迹叫作抛物线．

*本文系江苏省教育科学“十二五”规划课题“高中数学课堂中微型探究教学的实践与研究”（编号：B-b201502285）、江苏省教育科学“十三五”规划课题“本原性问题驱动下高中数学多元变式教学的实践研究”（编号：D/2016/02/244）的阶段性研究成果．

学生通过思考讨论会得出如下结论：(1) 都是两个距离的关系；(2) 椭圆和双曲线定义中是到两个定点(焦点) 的距离的关系，而抛物线定义中是到定点(焦点) 的距离与到定直线(准线) 的距离的关系.

问题2　如果它们的定义能统一，是都用到两定点的距离关系来定义，还是都用到一定点的距离和到一定直线的距离的关系来定义呢？猜想一下，用哪个更合理？为什么？

学生通过探究讨论得出如下结论：如果它们的定义能统一，那么用到一定点 F 的距离和到一定直线 l 的距离的关系来定义更合理，定点可能是一个焦点. 因为抛物线只有一个焦点.

2.3　微型探究，生成定义

·微型探究活动1——椭圆为例，验证猜想

问题3　以椭圆为例，椭圆上任意一点到一个定点的距离和到一定直线 l 的距离是否存在某种数量关系呢？

师：首先，我们以椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 为例，椭圆上任意一点 $M(x,y)$ 到一个定点的距离和到一定直线 l 的距离存在什么数量关系呢？

生1：我认为这个定点可以选一个焦点，定直线应是垂直于 x 轴的一条直线.

师：有理由吗？

生1：由抛物线 $y^2=2px$ 的定义中定点是焦点 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，定直线为 $x=-\frac{p}{2}$，类比联想，从而猜想椭圆中这条定直线也应是垂直于 x 轴的一条直线.

师：很好！既是大胆的猜想，也是合情合理的. 现在不妨设 $x=m$(常数)，请大家分别计算一下 $M(x,y)$ 到一个焦点的距离及到直线 $x=m$ 的距离，看有何发现？

(学生计算)

生2：我取了定点为右焦点 $F(c,0)$，则 $MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 与 $d=|x-m|$，但没能发现关系……

师：$MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 与 $d=|x-m|$ 的差异在哪呢？能否减少它们的差异呢？

生2：$\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 有两个变量，而 $|x-m|$ 只有一个变量. 我知道了，可以消元. 即有下述过程：因为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，所以 $y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$，故 $MF=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}x^2-2cx+a^2}=\frac{c}{a}\left|x-\frac{a^2}{c}\right|$. 可以发现，只要常数 $m=\frac{a^2}{c}$，$MF=\frac{c}{a}\cdot d$，椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点 $P(x,y)$ 到定点 $F(c,0)$ 的距离与到直线 $l:x=\frac{a^2}{c}$ 的距离之比是常数 $\frac{c}{a}$，这个常数就是离心率.

师：很好！还有其他发现吗？

生3：我取的定点为左焦点 $F(-c,0)$，找到了定直线 $l:x=-\frac{a^2}{c}$，发现椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上任意一点 $P(x,y)$ 到定点 $F(-c,0)$ 的距离和到直线 $l:x=-\frac{a^2}{c}$ 的距离之比是常数 $\frac{c}{a}$.

师：太好了！类似抛物线，我们可以将直线 $x=\pm\frac{a^2}{c}$ 定义为椭圆的准线(图2)，通过大家探究发现，椭圆上任意一点到一个定点(焦点) 的距离和到一定直线 l(相应准线) 的距离之比是常数 $\frac{c}{a}$(离心率).

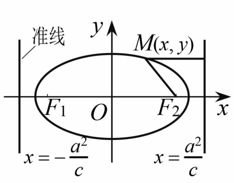

图2

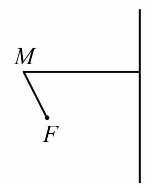

图3

问题4　反之，平面内到一个定点 F 的距离与到一定直线 l 的距离之比是一个常数(小于1) 点的轨迹是椭圆吗(图3)？

生众：可以举几个例子看看.

师：不错的想法！我们用几何画板来演示观察一下！(通过演示发现点的轨迹是椭圆)

师：我们直观感觉点的轨迹是椭圆. 如何来证明呢？

生4：可以求点的轨迹方程，看是否是椭圆的方程.

师：太好了！要求点的轨迹方程，就要建系. 那么如何建系呢？

生4：以定点为原点，垂直定直线 l 的直线为 x 轴.

师：这样建系是可以的，但如果点的轨迹真是椭圆的话，你得到的轨迹方程是不是最简单的？

生4：应该不是.

师：那怎么建系，可以使得到的方程最简单？

(生 4 不能答出,让学生讨论 2 分钟)

生 5:根据问题 4 的探究,可以过定点 F 且垂直定直线 l 的直线为 x 轴,设常数为 $\frac{c}{a}(a>c>0)$,适当取原点,使定点 F 坐标为 $(c,0)$,定直线 l 的方程为 $x=\frac{a^2}{c}$.

师:非常好的想法. 问题 4 就转化为"已知点 $M(x,y)$ 到定点 $F(c,0)$ 的距离与它到定直线 l:$x=\frac{a^2}{c}$ 的距离的比是常数 $\frac{c}{a}(a>c>0)$,求点 M 的轨迹."现在尝试解决一下.

不一会儿,学生都得到如下过程:由 $\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a}$,得 $(x-c)^2+y^2=(\frac{c}{a}x-a)^2$,即 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)$. 令 $b^2=a^2-c^2>0$,方程可化为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

师:苦尽甘来呀!平面内到一个定点 F 的距离与到一定直线 l 的距离之比是一个常数(小于 1)点的轨迹是椭圆.

· 微型探究活动 2—— 变式探究,异曲同工

师:通过我们刚才的探究,我们已经知道椭圆可以用"平面内到一个定点 F 的距离与到一定直线 l 的距离之比是一个常数(小于 1)点的轨迹"来定义. 那么双曲线呢?怎样研究呢?谁来说说研究方案?

生 6:根据椭圆的研究方法,可以研究以下两个问题:(1) 双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 上任意一点 $M(x,y)$ 到一个定点 $F(c,0)$(或 $F(-c,0)$)的距离与到一定直线 l:$x=\frac{a^2}{c}$(或 $x=-\frac{a^2}{c}$)的距离之比是否为常数 $\frac{c}{a}$?(2) 已知点 $M(x,y)$ 到定点 $F(c,0)$ 的距离与它到定直线 l:$x=\frac{a^2}{c}$ 的距离的比是常数 $\frac{c}{a}(c>a>0)$,求点 M 的轨迹.

师:很不错的方案!大家尝试一下!(学生很快完成)

师:太好了!现在回到本课的中心问题,椭圆、双曲线、抛物线如何统一定义呢?

经过学生讨论修正:平面内到一定点 F 与到一条定直线 l(点 F 不在直线 l 上)的距离之比为常数 e 的点的轨迹叫圆锥曲线. 当 $0<e<1$ 时,它表示椭圆;当 $e>1$ 时,它表示双曲线;当 $e=1$ 时,它表示抛物线. 其中 e 是圆锥曲线的离心率,定点 F 是圆锥曲线的焦点,定直线 l 是圆锥曲线的准线.

根据图形的对称性可知,椭圆和双曲线都有两条准线,对于中心在原点、焦点在 x 轴上的椭圆或双曲线,与焦点 $F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$ 对应的准线方程分别为 $x=-\frac{a^2}{c}$,$x=\frac{a^2}{c}$;焦点在 y 轴上的椭圆或双曲线,与焦点 $F_1(0,-c)$,$F_2(0,c)$ 对应的准线方分别为 $y=-\frac{a^2}{c}$,$y=\frac{a^2}{c}$.

2.4　尝试应用,形成经验

不同的学生的认知水平和思维能力总是存在差异的. 为了保证不同层次的学生在夯实基础的前提下都得到相应的发展,我编选了两组课内例习题. 例 1 的设计目的是让学生掌握标准方程下的圆锥曲线准线方程求法;例 2 及其变式是加深学生对圆锥曲线统一定义的理解,体现数形结合思想.

例 1　求下列曲线的准线方程,并画出草图:(1) $25x^2+16y^2=400$;(2) $x^2-8y^2=32$;(3) $y^2=16x$;(4) $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{16}=1$.

例2　已知动点 $P(x,y)$ 满足 $5\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=|3x+4y+12|$,则满足条件的点 P 所构成的曲线是________.

变式 1　已知动点 $P(x,y)$ 满足 $5\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=|3x+4y-11|$,则点 P 的轨迹是________.

变式 2　已知动点 $P(x,y)$ 满足 $m\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=|3x+4y+12|$,此方程表示的轨迹是椭圆,则 m 的取值范围是________.

2.5　总结提升,布置作业(略)

3　回顾与反思

3.1　教学设计立意

遵循由旧到新的发展原则,通过简要复习本章 2.1 的内容,提出本节课的中心问题,重点比较 3 种圆锥曲线的定义,为学生探究统一定义指明方向. 然后类比抛物线的定义,提出猜想,基于学生的经验组织学生开展微型探究、验证猜想,充分发挥学生学习的主动性. 让学生在探究活动中体验圆锥曲线之间的内在联系,培养欣赏美、发现美的能力,感受数学发现和创造的快乐. 同时发展学生的推理能力和运算能力. 编选了两组课内例习题,保证不同层次的学生在夯实基础的前提下都

得到相应的发展，实现教学目标，提高教学的针对性和有效性.

3.2 教学反思

（1）师生教材需对话

通过对教材的研读，觉得有以下几点困惑需要解决. 首先，教材第 50 页的抛物线定义为“抛物线是平面内到一个定点 F 和到一条定直线 l（F 不在 l 上）的距离相等的点的轨迹.”而教材中提出“当这个比值是一个不等于 1 的常数时，动点 P 的轨迹又是什么曲线呢？”这一问题预设太明显，是设好的圈套让学生钻进去，学生却不知为何要钻进去. 其次，教材中通过观察几何画板的演示可以得到：当常数是 $\frac{1}{2}$ 时，得到的是椭圆；当常数等于 2 时，得到的是双曲线. 这在本质上还是教师所给予的，因为动画的演示几乎没有学生的思维参与. 再次，教材利用椭圆标准方程推导过程中的 $a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$，学生普遍感觉陌生，式子的给出感觉突然. 学生容易联想到方程，却不可能去联想标准方程的推导过程. 因此，这其实也还是老师给予了这个发现.

基于上述困惑，本教学提出中心问题：椭圆、双曲线、抛物线既然都叫圆锥曲线，从整体的、统一的、和谐的角度思考，它们是否有一个统一的定义呢？让学生比较三种曲线的定义，提出合理的猜想，开展微型探究，验证猜想. 这样做让知识生成得更自然. 通过教师的引导，学生参与探索，零距离地感受到圆锥曲线统一定义的形成不是“无本之木，无源之水”，而是在已有知识的基础上自然形成的，这样的教学能促使学生创新能力的发展，提高学习数学的兴趣.《国家基础教育课程改革指导纲要》明确提出了“用教材教”而不是“教教材”的新观念. 使用教材的目的是实现教学目标，而不是教完教材. 教材是为教学服务的，而不是用来束缚限制教学的. 教师应当从教学的实际出发灵活地、创造性地使用教材，而不应甘作教材的奴隶. 教师要和学生对话，要和教材对话，必须客观求实地看待教材，自主创新地选择、组织和使用教材.

（2）教学设计当有问题引领

教学过程是一种提出问题、解决问题的持续不断的过程. 问题是数学的心脏，让思维从问题开始，思维活动又形成新的问题，这种递进式的问题引领着学生思考，也为学生搭起了支架，指明了探究的方向. 当然问题要针对学生思维的最近发展区提出，才能促进学生的发展. 本节课从古希腊数学家阿波罗尼斯采用平面切割圆锥出发，自然提出中心问题（也是学生心理需求），并比较三种曲线的定义，让学生自主发现三种曲线的定义有共性，具有统一的可能性提出猜想，再利用“从特殊到一般”的研究方法提出了新问题：椭圆上任意一点到一个定点的距离和到一定直线 l 的距离是否存在某种数量关系呢？这为探究进一步指明了方向. 再从数学的完备性考虑，又提出了新问题：反之，平面内到一个定点 F 的距离与到一定直线 l 的距离之比是一个常数（小于 1）点的轨迹是椭圆吗？这些问题环环相扣，不断促进学生的思维深入，引领学生学会探究.

（3）适当开展微型探究

教材中多采用“定义（概念）— 性质 — 定理 — 应用”的演绎体系呈现概念（或定理），希望学生学习概念后再解决问题，并通过解决问题进一步理解和掌握概念（或定理）. 这样的演绎体系有利于学生知识系统的形成，但同时也把有意义的、鲜活的生成数学概念（或定理）的活动给掩盖了，学生不知道这些数学概念（或定理）从何而来、为何如此规定. 荷兰数学教育家弗赖登塔尔称此为“教学法的颠倒”. 然而探究的教学要求较高，学生容易走向盲目和肤浅，影响探究的方向、深度和数学的本质. 如果数学探究学习的方向偏了，便失去了探究的意义，流于形式. 因此，我们应抓住数学的本原来开展微型探究活动，就是要让学生在一系列数学问题的引领下来解决问题，在问题解决过程中获得有价值的“副产品”—— 概念（或定理）的不断抽象形式，从而把握概念（或定理）的实质内涵. 高中数学学习中总是要经常性地探索一些数学的一般结论，这正是数学本质的一种追寻过程. 微型数学探究教学正是可以引导学生经常性地反思问题的规律性，揭示问题的一般性特征，抓住数学的本原，教会学生探究的一个方向.

参考文献

[1] 花奎. 高中数学微型探究教学的思考[J]. 上海教育科研，2014(3).

[2] 弗赖登塔尔. 作为教育任务的数学[M]. 陈昌平，唐瑞芬译，上海：上海教育出版社，1995.