江苏省仪征中学 2020-2021 学年度高三数学周三试卷（2020.12.23）

班级__________　学号__________　姓名______________

一、单项选择题

1. 设函数 $f(x)=\sin(\frac{1}{2}x+\theta)-\sqrt{3}\cos(\frac{1}{2}x+\theta)(|\theta|<\frac{\pi}{2})$ 的图像关于原点对称，则 θ 的值为（　）

A. $-\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{6}$　　C. $-\frac{\pi}{3}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

2. 过抛物线 $y^2=4x$ 的焦点作两条互相垂直的弦 AB，CD，则四边形 $ABCD$ 面积的最小值为（　）

A. 8　　B. 16　　C. 32　　D. 64

3. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，$a_1=1$，当 $n\geq 2$ 时，$a_n+2S_{n-1}=n$，，则 S_{2019} 的值为（　　）

A. 1008　　B. 1009　　C. 1010　　D. 1011

4. 设点 P 为函数 $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2ax$ 与 $g(x)=3a^2\ln x+b(a>0)$ 的图像的公共点，以 P 为切点可作直线与两曲线都相切，则实数 b 的最大值为（　）

A. $\frac{2}{3}e^{\frac{2}{3}}$　　B. $\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$　　C. $\frac{2}{3}e^{\frac{3}{2}}$　　D. $\frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}}$

二、多项选择题

5. 设 l，m，n 表示不同的直线，α，β，γ 表示不同的平面，给出下列四个命题中正确的是（　　）

A. 若 $m\parallel l$，且 $m\perp\alpha$，则 $l\perp\alpha$

B. 若 $m\parallel l$，且 $m\parallel\alpha$，则 $l\parallel\alpha$

C. 若 $\alpha\cap\beta=l$，$\beta\cap\gamma=m$，$\gamma\cap\alpha=n$，则 $l\parallel m\parallel n$

D. 若 $\alpha\cap\beta=m$，$\beta\cap\gamma=l$，$\gamma\cap\alpha=n$，且 $n\parallel\beta$，则 $l\parallel m$

6. 把函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ (纵坐标不变)，再将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到函数 $g(x)$的图象，则下列说法不正确的是（　　）

A. $g(x)$在 $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增

B. $g(x)$的图象关于 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称

C. $g(x)$的最小正周期为 4π

D. $g(x)$的图象关于 y 轴对称

三、填空题

7. 已知正方形 $ABCD$ 的边长为 2，P 为平面 $ABCD$ 内一点，则 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD})$ 的最小值为______.

8. 将数列$\{a_n\}$中的所有项排成如下数阵：其中每一行项数是上一行项数的 2 倍，且从第二行起每一行均构成公比为 2 的等比数列.

a_1

a_2，a_3

a_4，a_5，a_6，a_7

a_8，a_9，a_{10}，a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{14}，a_{15}

……

记数阵中的第 1 列 $a_1,a_2,a_4,\cdots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$，T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和，$T_n=5n^2+3n$，则

$b_n=$________，$a_{1025}=$ ________.

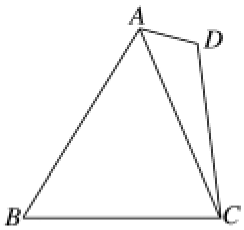
四、解答题

9. 已知在数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，前 n 项和 $S_n=\frac{n+2}{3}a_n$.

(1)求 a_2，a_3；

(2)求$\{a_n\}$的通项公式.

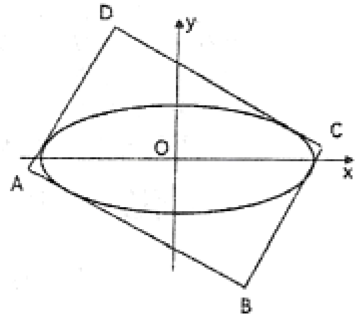
10. $\triangle ABC$的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，已知 $b\cos A+\dfrac{\sqrt{3}}{3}a=c$.



（1）求 $\cos B$；

（2）如图，D 为$\triangle ABC$外一点，若在平面四边形 $ABCD$ 中，$D=2B$，且 $AD=1$，$CD=3$，$BC=\sqrt{6}$，求 AB 的长.

11. 设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{1}{2}$，椭圆上的点到左焦点 F_1 的距离的最大值为 3.



（1）求椭圆 C 的方程；

（2）求椭圆 C 的外切矩形 $ABCD$ 的面积 S 的取值范围.

一、单项选择题

1. 【详解】因为 $f\left(x\right)=\sin\left(\frac{1}{2}x+\theta\right)-\sqrt{3}\cos\left(\frac{1}{2}x+\theta\right)=2\sin\left(\frac{1}{2}x+\theta-\frac{\pi}{3}\right)$，

又函数 $f\left(x\right)$ 关于原点对称，所以 $\theta-\frac{\pi}{3}=k\pi\left(k\in Z\right)$，即 $\theta=\frac{\pi}{3}+k\pi\left(k\in Z\right)$，

因为 $|\theta|<\frac{\pi}{2}$，所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$.

故选 D

2.【详解】显然焦点 F 的坐标为 $\left(1,0\right)$，所以可设直线 AB 的方程为 $y=k\left(x-1\right)$，

代入 $y^2=4x$ 并整理得 $k^2x^2-\left(2k^2+4\right)x+k^2=0$，

所以 $x_1+x_2=2+\frac{4}{k^2}$，$|AB|=x_1+x_2+2=4+\frac{4}{k^2}$，

同理可得 $|CD|=4+4k^2$，所以

$$S=\frac{1}{2}|AB||CD|=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\left(k^2+1\right)}{k^2}\cdot 4\left(k^2+1\right)=8\cdot\frac{\left(k^2+1\right)^2}{k^2}=8\left(k^2+\frac{1}{k^2}+2\right)\geq 32$$

故选 C.

3. 【详解】当 $n\geq 2$ 时，$a_n+2S_{n-1}=n$，①

可得 $a_{n+1}+2S_n=n+1$，②

由②－①得，$a_{n+1}-a_n+2(S_n-S_{n-1})=1$，整理得 $a_{n+1}+a_n=1\left(n\geq 2\right)$，

又由 $a_1=1$

所以 $S_{2019}=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+a_5)+\cdots+(a_{2018}+a_{2019})=1010$.

故选：C.

4. 【详解】设 $P\left(x_0, y_0\right)$，由于点 P 为切点，则 $\frac{1}{2}x_0{}^2+2ax_0=3a^2\ln x_0+b$，

又点 P 的切线相同，则 $f'\left(x_0\right)=g'\left(x_0\right)$，即 $x_0+2a=\frac{3a^2}{x_0}$，即 $\left(x_0+3a\right)\left(x_0-a\right)=0$，

又 $a>0$，$x_0>0$，$\therefore x_0=a$，于是，$b=\frac{5}{2}a^2-3a^2\ln a(a>0)$，设 $h\left(x\right)=\frac{5}{2}x^2-3x^2\ln x(x>0)$，

则 $h'\left(x\right)=2x\left(1-3\ln x\right)(x>0)$，所以 $h\left(x\right)$ 在 $\left(0,e^{\frac{1}{3}}\right)$ 单调递增，在 $\left(e^{\frac{1}{3}},+\infty\right)$ 单调递减，b 的最大值为

$h\left(e^{\frac{1}{3}}\right)=\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$，故选 B.

二、多项选择题

5.【详解】A. 若 $m/\!/l$，且 $m\perp\alpha$，则 $l\perp\alpha$,故A 正确；

B. 直线 l 可能平行于 α 也可能在 α 内，故 B 错；

C. 直线 l，m，n 可能平行也可能相交于一点，故 C 错；

D.因为 $n/\!/\beta$，$n\subset\alpha$，$\alpha\cap\beta=m$，所以 $n/\!/m$，同理，$n/\!/l$，所以 $l/\!/m$，故D正确.

故选：AD

6.【详解】把函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象上各点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 得到 $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，

再将图象向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位长度得到函数 $g(x)=\sin\left[2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\pi}{3}\right]=\sin\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象.

若 $x\in\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$，则 $2x-\frac{\pi}{6}\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{6}\right)$，$\therefore g(x)$ $\left(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递增，故 A 正确，不符合题意；

由 $g\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\neq 0$ 知，$g(x)$的图象不关于点 $\left(\frac{\pi}{6},0\right)$ 对称，故 B 错误，符合题意；

$g(x)$的最小正周期为 π，故 C 错误，符合题意；

$\because g(0)=-\frac{1}{2}\neq\pm 1$，$\therefore g(x)$的图象不关于 y 轴对称，故 D 错误，符合题意.

故选：CD.

三、填空题

7.【详解】由题意，以 A 为坐标原点，AB 方向为 x 轴，AD 方向为 y 轴，建立平面直角坐标系，

因为正方形 $ABCD$ 的边长为 2，所以可得 $A\left(0,0\right)$、$B\left(2,0\right)$、$C\left(2,2\right)$、$D\left(0,2\right)$，

设 $P(x,y)$，则 $\overrightarrow{PA}=(-x,-y)$，$\overrightarrow{PB}=(2-x,-y)$，$\overrightarrow{PC}=(2-x,2-y)$，$\overrightarrow{PD}=(-x,2-y)$，

所以 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=(2-2x,-2y)$，$\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}=(2-2x,4-2y)$，

因此 $\left(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}\right)\cdot\left(\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}\right)=4(1-x)^2-4y(2-y)=4(x-1)^2+4(y-1)^2-4\geq-4$ ，

当且仅当 $x=y=1$ 时，取最小值.

故答案为-4

8. 【详解】由题意，数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项的和为 $T_n=5n^2+3n$，

当 $n\geq2$ 时，$b_n=T_n-T_{n-1}=(5n^2+3n)-[5(n-1)^2+3(n-1)]=10n-2$，

当 $n=1$ 时，$b_1=T_1=8$，适合上式，所以 $b_n=10n-2$，

又由数阵中的第 1 列 $a_1,a_2,a_4,\cdots$ 构成的数列为 $\{b_n\}$，可得 $a_{1024}=b_{11}=108$，

因为从第二行起每一行均构成公比为 2 的等比数列，所以 $a_{1025}=2a_{1014}=216$

故答案为：$10n-2$，216.

四、解答题

9. 解 (1)由 $S_2=\frac{4}{3}a_2$，得 $3(a_1+a_2)=4a_2$，解得 $a_2=3a_1=3$；

由 $S_3=\frac{5}{3}a_3$，得 $3(a_1+a_2+a_3)=5a_3$，解得 $a_3=\frac{3}{2}(a_1+a_2)=6$.

(2)由题设知 $a_1=1$.当 $n>1$ 时，有 $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n+2}{3}a_n-\frac{n+1}{3}a_{n-1}$，整理，得 $a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}$.

于是 $a_1=1$，$a_2=\frac{3}{1}a_1$，$a_3=\frac{4}{2}a_2$，…，$a_{n-1}=\frac{n}{n-2}a_{n-2}$，$a_n=\frac{n+1}{n-1}a_{n-1}$，

将以上 n 个等式两端分别相乘，整理，得 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，经检验 $n=1$ 时，也满足上式.

综上，$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$.

10. 【详解】解 （1）在 $\triangle ABC$ 中，由正弦定理得 $\sin B\cos A+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A=\sin C$，

又 $C=\pi-(A+B)$，所以 $\sin B\cos A+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A=\sin(A+B)$，故 $\sin B\cos A+\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以 $\sin A\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin A$，又 $A\in(0,\pi)$，所以 $\sin A\neq0$，故 $\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）因为 $D=2B$，所以 $\cos D=2\cos^2B-1=-\frac{1}{3}$，又在 $\triangle ACD$ 中，$AD=1$，$CD=3$，

所以由余弦定理可得 $AC^2=AD^2+CD^2-2AD\cdot CD\cos D=1+9-2\times3\times\left(-\frac{1}{3}\right)=12$，

所以 $AC=2\sqrt{3}$，在 $\triangle ABC$ 中，$BC=\sqrt{6}$，$AC=2\sqrt{3}$，$\cos B=\frac{\sqrt{3}}{3}$，

所以由余弦定理可得 $AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cos B$，

即 $12=AB^2+6-2AB\times\sqrt{6}\times\frac{\sqrt{3}}{3}$，化简得 $AB^2-2\sqrt{2}AB-6=0$，解得 $AB=3\sqrt{2}$ 故 AB 的长为 $3\sqrt{2}$.

11.【详解】解：（1）由题设条件可得 $\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$，$a+c=3$，解得 $a=2$，$c=1$

$\therefore b^2=a^2-c^2=3$，所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

（2）当矩形 $ABCD$ 的一组对边斜率不存在时，得矩形 $ABCD$ 的面积 $S=8\sqrt{3}$

当矩形 $ABCD$ 四边斜率都存在时，不防设 AB，CD 所在直线斜率为 k，则 BC，AD 斜率为 $-\frac{1}{k}$，

设直线 AB 的方程为 $y=kx+m$，与椭圆联立 $\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 可得

$\left(4k^2+3\right)x^2+8kmx+4m^2-12=0$，

由 $\Delta=(8km)^2-4\left(4k^2+3\right)\left(4m^2-12\right)=0$，得 $m^2=4k^2+3$

显然直线 CD 的直线方程为 $y=kx-m$，直线 AB，CD 间的距离

$$d_1=\frac{2|m|}{\sqrt{k^2+1}}=2\sqrt{\frac{m^2}{k^2+1}}=2\sqrt{\frac{4k^2+3}{k^2+1}},$$

同理可求得 BC，AD 间的距离为 $d_1=2\sqrt{\frac{\frac{4}{k^2}+3}{\frac{1}{k^2}+1}}=2\sqrt{\frac{4+3k^2}{k^2+1}}$

所以四边形 $ABCD$ 面积为

$$S_{ABCD}=d_1d_2=4\sqrt{\frac{3+4k^2}{k^2+1}}\sqrt{\frac{4+3k^2}{k^2+1}}=4\sqrt{\frac{12k^4+25k^2+12}{k^4+2k^2+1}}=4\sqrt{12+\frac{k^2}{k^4+2k^2+1}}$$

$=4\sqrt{12+\frac{1}{k^2+\frac{1}{k^2}+2}}\le4\sqrt{12+\frac{1}{4}}=14$（等号当且仅当 $k=\pm1$ 时成立）

又 $S_{ABCD}>4\sqrt{12}=8\sqrt{3}$，

故由以上可得外切矩形面积的取值范围是$\left[8\sqrt{3},14\right]$