例解函数零点问题

江苏徐州市第三十五中学(221003)　乔祥敏

函数与方程是高考中新增的知识点，而函数零点是函数与方程中的重要知识之一. 虽然函数与方程在考试说明中是 A 级要求，但由于函数的零点能与函数的图像、性质、导数、三角函数等知识有机地结合在一起，可以综合考查学生的数形结合思想、分类讨论思想、等价转化思想和函数与方程思想，所以近些年高考中出现了“零点热”. 其试题类型主要有如何求函数零点、研究整数零点、求函数零点所在范围、研究函数零点个数等.

一、求函数零点

函数 $f(x)$ 的零点是使 $y=f(x)$ 的值为 0 的实数 x 的值，即函数 $y=f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 的实数根，所以我们可以直接利用方程思想求出方程 $f(x)=0$ 的根，从而解决函数零点问题.

【例 1】 (2012 年湖北高考试题)函数 $f(x)=x\cos x^2$ 在区间 $[0,4]$ 上的零点个数为(　　).

A. 4　　B. 5　　C. 6　　D. 7

解析：因为 $f(x)$ 解析式是因式之积的形式，所以应分类讨论其中的每个因式为 0 的情况，即可求出函数的零点，从而确定函数零点个数.

解：因为 $x=0\in[0,4]$，且 $f(0)=0$，所以 0 是函数 $f(x)$ 的一个零点.

当 $x\neq 0$ 时，$\cos x^2=0$ 的解中的 x 的值即 $f(x)$ 在 $(0,4]$ 上的零点，令 $t=x^2$，根据余弦函数可以近似作出 $y=\cos t(x>0)$ 的部分图像，如图 1 所示. 因为 $\frac{9\pi}{2}<4^2=16<\frac{11\pi}{2}$，由图 1 可知，在 $(0,4]$ 上有 $\frac{\pi}{2}$、$\frac{3\pi}{2}$、$\frac{5\pi}{2}$、$\frac{7\pi}{2}$、$\frac{9\pi}{2}$ 使 $\cos x^2=0$ 成立，即 $f(x)=0$ 成立.

综上所述，函数 $f(x)=x\cos x^2$ 在区间 $[0,4]$ 上的零点有 6 个，故选 C.

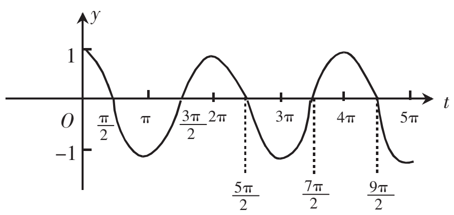

图 1

【例 2】 (2009 年广东高考试题)已知二次函数 $y=g(x)$ 的导函数的图像与直线 $y=2x$ 平行，且 $y=g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得最小值 $m-1(m\neq 0)$. 设函数 $f(x)=\frac{g(x)}{x}$.

(1)若曲线 $y=f(x)$ 上的点 P 到点 $Q(0,2)$ 的距离的最小值为 $\sqrt{2}$，求 m 的值；

(2)$k(k\in\mathbf{R})$ 如何取值时，函数 $y=f(x)-kx$ 存在零点，并求出零点.

解析：(1)由导函数和两直线平行关系等知识，可求出二次项系数，再利用二次函数图像的对称性及最值等知识求出一次项系数和常数项，即得函数 $y=g(x)$ 的解析式，然后利用 $f(x)=\frac{g(x)}{x}$ 可得 $y=f(x)$ 的解析式，利用 P、Q 两点之间的距离公式和基本不等式可以求出 P、Q 两点距离的最小值，从而得到 m 的值；(2)要研究函数 $y=f(x)-kx$ 的零点，根据第(1)问可得函数 $y=f(x)-kx$ 的解析式，利用等价转化的思想，可以把函数 $y=f(x)-kx$ 存在零点转化为方程根的问题，再利用分类讨论的思想来解决.

解：(1)设 $g(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$，则 $g'(x)=2ax+b$，

由 $g'(x)$ 的图像与直线 $y=2x$ 平行得 $2a=2$，即 $a=1$，

又 $y=g(x)$ 在 $x=-1$ 处取得最小值 $m-1(m\neq 0)$，所以 $-\frac{b}{2}=-1$，且 $g(-1)=a-b+c=m-1$，则 $b=2$，$c=m$，则 $f(x)=\frac{g(x)}{x}=x+\frac{m}{x}+2$，

设 $P(x_0,y_0)$，则 $|PQ|^2=x_0^2+(y_0-2)^2=x_0^2+(x_0+\frac{m}{x_0})^2=2x_0^2+\frac{m^2}{x_0^2}+2m\geqslant 2\sqrt{2m^2}+2m$，

所以 $2\sqrt{2m^2}+2m=2$，解得 $m=\pm\sqrt{2}-1$.

(2)由(1)知，函数 $y=f(x)-kx$ 存在零点，即方程 $(1-k)x+\frac{m}{x}+2=0$ 有实数根，故 $(1-k)x^2+2x+m=0$ 有非零实数根.

当 $k=1$ 时，方程 $(1-k)x^2+2x+m=0$ 的解为 $x=-\frac{m}{2}(m\neq 0)$，则函数 $y=f(x)-kx$ 有一个零点 $x=-\frac{m}{2}$；

当 $k\neq 1$ 时，若 $\Delta=4-4m(1-k)>0$，则方程 $(1-k)x^2+2x+m=0$ 有两个不相等的实数解，

若 $m>0$，则 $k>1-\frac{1}{m}$，

函数 $y=f(x)-kx$ 有两个零点 $x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4m(1-k)}}{2(1-k)}=\frac{1\pm\sqrt{1-m(1-k)}}{k-1}$；

若 $m<0$，则 $k<1-\frac{1}{m}$，

函数 $y=f(x)-kx$ 有两个零点 $x=\frac{-2\pm\sqrt{4-4m(1-k)}}{2(1-k)}=\frac{1\pm\sqrt{1-m(1-k)}}{k-1}$；

当 $k\neq1$ 时，若 $\Delta=4-4m(1-k)=0$，即 $k=1-\frac{1}{m}$，则方程 $(1-k)x^2+2x+m=0$ 有一个解，即 $x=\frac{1}{k-1}=-m$，函数 $y=f(x)-kx$ 有一个零点 $x=\frac{1}{k-1}=-m$.

综上，当 $k=1$ 时，函数 $y=f(x)-kx$ 有一零点 $x=-\frac{m}{2}$；

当 $k>1-\frac{1}{m}(m>0)$ 或 $k<1-\frac{1}{m}(m>0)$ 时，函数 $y=f(x)-kx$ 有两个零点 $x=\frac{1\pm\sqrt{1-m(1-k)}}{k-1}$；

当 $k=1-\frac{1}{m}$ 时，函数 $y=f(x)-kx$ 有一零点 $x=\frac{1}{k-1}=-m$.

二、研究整数零点

要求零点是整数，那么就必须先利用方程思想求出零点，然后根据“零点为整数”这一性质，探求满足条件的参数的值，最后再代入原方程进行检验.

【例3】（2011年陕西理科高考试题）设 $n\in\mathbf{N}_+$，一元二次方程 $x^2-4x+n=0$ 有整数根的充要条件是 $n=$______.

解析：本题中一元二次方程已知，可以直接利用求根公式求出根，然后用完全平方数、整除等进行判断计算.

解：由题意知 $\Delta=16-4n\geqslant0$，又因为 $n\in\mathbf{N}_+$，所以 $n=1、2、3、4$，由求根公式得 $x=\frac{4\pm\sqrt{16-4n}}{2}=2\pm\sqrt{4-n}$，因为 x 是整数，即 $2\pm\sqrt{4-n}$ 为整数，所以 $\sqrt{4-n}$ 为整数，验证可知 $n=3、4$ 符合题意；反之 $n=3、4$ 时，可推出一元二次方程 $x^2-4x+n=0$ 有整数根，所以一元二次方程 $x^2-4x+n=0$ 有整数根的充要条件是 $n=3$ 或 4.

三、研究函数零点所在范围

要研究函数零点所在的区间，通常是不便直接求出零点，常用如下两种方法进行处理.第一，利用零点存在性定理，考查函数图像与 x 轴的交点；第二，把函数拆成两个函数，从而利用两个图像交点来估计零点存在的范围.

【例4】（2011年山东高考试题）已知函数 $f(x)=\log_a x+x-b(a>0$，且 $a\neq1)$.当 $2<a<3<b<4$ 时，函数 $f(x)$ 的零点 $x_0\in(n,n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $n=$______.

解析：函数 $f(x)=\log_a x+x-b$ 的零点是方程组 $\begin{cases}y=g(x)=\log_a x\\y=h(x)=b-x\end{cases}$ 的解中 x 的值，即为函数 $g(x)=\log_a x$ 与 $h(x)=b-x$ 图像交点的横坐标 x_0.

在平面直角坐标系中，作出函数 $g(x)=\log_a x$ 与 $h(x)=b-x$ 的图像，如图2所示.当 $x=a$ 时，$g(a)=\log_a a=1$，$h(a)=b-a>1=g(a)$；当 $x=3$ 时，$g(3)=\log_a 3<2$，$h(3)=b-3<1<g(3)$，所以图像交点的横坐标 $x_0\in(a,3)$，即 $x_0\in(2,3)$，所以 $n=2$.

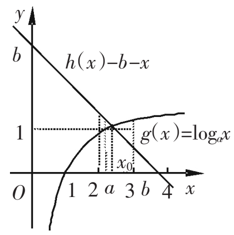

图2

【例5】（2012年福建高考试题）已知 $f(x)=x^3-6x^2+9x-abc$，$a<b<c$，且 $f(a)=f(b)=f(c)=0$.现给出如下结论：

①$f(0)f(1)>0$；②$f(0)f(1)<0$；③$f(0)f(3)>0$；④$f(0)f(3)<0$.

其中正确结论的序号是（　　）.

A.①③　B.①④　C.②③　D.②④

解析：本题研究三次函数的零点，利用导数的知识可得函数的单调区间和极值点.因为函数 $f(x)$ 有三个零点，所以极大值大于0，极小值小于0，可得 $a、b、c$ 的取值范围，从而得到 $f(0)、f(1)、f(3)$ 的符号.

解：由 $f(x)=x^3-6x^2+9x-abc$ 得，$f'(x)=3x^2-12x+9$，令 $f'(x)=0$，则 $x=1$ 或 $x=3$，当 $x<1$ 或 $x>3$ 时，$f'(x)>0$；当 $1<x<3$ 时，$f'(x)<0$，所以当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极大值，当 $x=3$ 时，$f(x)$ 有极小值.

因为函数 $f(x)$ 有三个零点，所以 $f(1)>0$，$f(3)<0$，且 $a<1<b<3<c$.

又因为 $f(3)=27-54+27-abc$，所以 $abc>0$，即 $a>0$，因此 $f(0)<f(a)=0$，所以 $f(0)f(1)<0$，$f(0)f(3)>0$.故选C.

四、研究函数零点个数

要研究函数零点个数，通常利用函数图像交点个数来观察图像得到函数零点个数.当函数是复合函数时还需要利用函数图像和函数概念考查函数值所对应的 x 的个数，进而解决函数零点个数问题.下面就复合函数的零点问题进行探讨.

【例6】（2012年江苏高考试题）若函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极大值或极小值，则称 x_0 为函数 $y=f(x)$ 的极值点.已知 a,b 是实数，1和 -1 是函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx$ 的两个极值点.

(1)求 a 和 b 的值；

(2)设函数 $g(x)$ 的导函数 $g'(x)=f(x)+2$，求 $g(x)$ 的极值点；

(3)设 $h(x)=f(f(x))-c$，其中 $c\in[-2,2]$，求函数 $y=h(x)$ 的零点个数.

解析：本题研究复合函数的零点，由条件得到函数的解析式后，利用导数的知识可得函数 $f(x)$ 的单调区间和极值点，解决第(1)问和第(2)问.要研究函数 $h(x)$ 的零点个数，那么需要利用函数的定义，先讨论函数 $f(x)$ 的单调性和 x 在对应法则的作用下 y 值的情况，即

体验“动态”立体几何问题的魅力

福建漳州开发区厦门大学附属实验中学(363105) 郑元壮

立体几何是一门让学生体验数学“美”、锻炼空间想象能力以及逻辑思维能力的科学,例如几何体的表面展开可以把空间问题转化为我们熟知的平面几何问题,使问题简单明了;旋转体的形成过程可以把平面图形向空间几何体转化,让人产生无限的遐想.“动态”的立体几何问题,不仅可以增加问题的趣味性,还能激发学生的学习兴趣,让学生主动去思考、钻研.在立体几何的学习中,渗透动态元素,赋予其新的活力,就会使立体几何问题更加灵活新颖,给予学生更加广阔的想象空间,激发学生的学习潜能.下面举例说明.

一、“点”动使问题多元化

【例1】 如图1,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,E 为线段 BC_1 的中点,F 为线段 A_1C_1 上的动点,则下列结论中正确的是(　　).

A. 存在点 F 使 $EF\parallel BD_1$

B. 不存在点 F 使 $EF\perp$ 平面 AB_1C_1D

C. EF 与 AD_1 所成的角不可能等于 $90°$

D. 三棱锥 B_1-ACF 的体积为定值

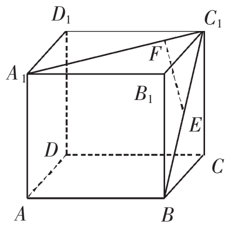

图1

解析:对A项,若存在点 F 使 $EF\parallel BD_1$,则 $BD_1\parallel$ 平面 A_1BC_1,而 $BD_1\cap$ 平面 $A_1BC_1=B$,故A错;当 F 为 A_1C_1 的中点时,$EF\parallel A_1B$,由 $A_1B\perp$ 平面 AB_1C_1D 知 $EF\perp$ 平面 AB_1C_1D,故B错;当 F 为 A_1 重合时,$\triangle A_1BC_1$ 为等边三角形,此时 $EF\perp BC_1$,而 $BC_1\parallel AD_1$,所以 $EF\perp AD_1$,故C错;因为 B_1 到平面 ACF 的距离为定值,$\triangle ACF$ 的面积也为定值,所以三棱锥 B_1-ACF 的体积为定值,应选D.

评注:本例中,由于 F 是动点,在前三个选项中,需对线线、线面的位置关系进行探究,问题因点 F 的位置变化而转化,对思维转换要求较高,而第四个选项,体现了“动”中有“静”,动与静的完美结合.此题不仅可以达到考查知识的目的,还可以培养学生的发散性思维能力.

二、“线”动使问题简化

【例2】 如图2,四边形 $EFGH$ 所在平面为三棱锥 $A-BCD$ 的一个截面,四边形 $EFGH$ 为平行四边形,若 $AB=4$,$CD=6$,则四边形 $EFGH$ 的周长 l 的取值范围

研究不同的函数值 y 有几个自变量 x 与其对应,然后利用整体思想、数形结合思想和函数 $f(x)$ 的图像与性质研究函数 $h(x)$ 的零点个数.

解:(1)由题设知 $f'(x)=3x^2+2ax+b$,又 $f'(-1)=0$,$f'(1)=0$,所以 $a=0$,$b=-3$.

(2)略;

(3)令 $f(x)=t$,则 $h(x)=f(t)-c$.先讨论关于 x 的方程 $f(x)=d$ 根的个数,$d\in[-2,2]$.

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$,令 $f'(x)=3(x+1)(x-1)>0$,解得 $x<-1$ 或 $x>1$,所以函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ 上单调递增;

令 $f'(x)=3(x+1)(x-1)<0$,解得 $-1<x<1$,所以函数 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递减.

所以当 $x=-1$ 时,函数 $f(x)$ 有极大值 $f(-1)=2$;当 $x=1$ 时,$f(x)$ 有极小值 $f(1)=-2$,且 $f(-2)=-2$,$f(2)=2$.根据函数 $f(x)$ 的性质作出函数的图像,如图3所示.

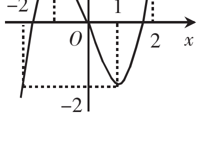

图3

当 $|d|=2$ 时,由图3知,方程 $f(x)=d$ 有两个实数根,且两个实数根为 -1、2 或 -2、1;

当 $|d|<2$ 时,方程 $f(x)=d$ 有三个实数根 x_1、x_2、x_3,且 x_1、x_2、$x_3\in(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)$.

下面再来考虑 $h(x)$ 的零点.

当 $|c|=2$ 时,$f(t)=c$ 有两个实数根 t_1、t_2,且满足 $|t_1|=1$,$|t_2|=2$,而 $f(x)=t_1$ 有三个根,$f(x)=t_2$ 有两个根,所以函数 $y=h(x)$ 共有5个零点;

当 $|c|<2$ 时,$f(t)=c$ 有三个实数根 t_3、t_4、t_5,且 t_3、t_4、$t_5\in(-2,-1)\cup(-1,1)\cup(1,2)$,而 $f(x)=t_3$,$f(x)=t_4$,$f(x)=t_5$ 都有三个实数根,所以函数 $y=h(x)$ 共有9个零点.

综上所述,当 $|c|=2$ 时,函数 $y=h(x)$ 共有5个零点;当 $|c|<2$ 时,函数 $y=h(x)$ 共有9个零点.

我们要通过导函数,结合函数图像,在充分掌握函数的性质基础上去研究零点问题,特别注意函数与方程思想、数形结合思想和等价转化思想在分析问题、解决问题过程中的应用,只有这样,零点问题才能得心应手.

(责任编辑　黄春香)