直线与抛物线的位置关系

1. 已知直线 l：$y=kx+1$，抛物线 C：$y^2=4x$，当 k 为何值时，l 与 C：只有一个公共点；有两个公共点；没有公共点.

解 联立$\begin{cases}y=kx+1,\\y^2=4x,\end{cases}$ 消去 y，得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$.(*)

当 $k=0$ 时，(*)式只有一个解 $x=\dfrac{1}{4}$，∴$y=1$，∴直线 l 与 C 只有一个公共点$\left(\dfrac{1}{4},\ 1\right)$，

此时直线 l 平行于 x 轴.当 $k\neq0$ 时，(*)式是一个一元二次方程，

$\Delta=(2k-4)^2-4k^2=16(1-k)$.①当 $\Delta>0$，即 $k<1$，且 $k\neq0$ 时，

l 与 C 有两个公共点，此时直线 l 与 C 相交；

②当 $\Delta=0$，即 $k=1$ 时，l 与 C 有一个公共点，此时直线 l 与 C 相切；

③当 $\Delta<0$，即 $k>1$ 时，l 与 C 没有公共点，此时直线 l 与 C 相离.

综上所述，当 $k=1$ 或 0 时，l 与 C 有一个公共点；

当 $k<1$，且 $k\neq0$ 时，l 与 C 有两个公共点；当 $k>1$ 时，l 与 C 没有公共点.

2.已知抛物线 C：$y^2=2px(p>0)$的焦点为 $F(1,0)$，抛物线 E：$x^2=2py$ 的焦点为 M.

(1)若过点 M 的直线 l 与抛物线 C 有且只有一个交点，求直线 l 的方程；

(2)若直线 MF 与抛物线 C 交于 A，B 两点，求△OAB 的面积.

解 (1)因为抛物线 C:$y^2=2px(p>0)$的焦点为 $F(1,0)$，抛物线 E:$x^2=2py$ 的焦点为 M，所以 $p=2$，$M(0,1)$.

①当直线 l 的斜率不存在时，其方程为 $x=0$，满足题意；

②当直线 l 的斜率存在时，设方程为 $y=kx+1$，代入 $y^2=4x$，得 $k^2x^2+(2k-4)x+1=0$，当 $k=0$ 时，$x=\dfrac{1}{4}$，满足题意，直线 l 的方程为 $y=1$；当 $k\neq0$ 时，令 $\Delta=(2k-4)^2-4k^2=0$，所以 $k=1$，直线 l 的方程为 $y=x+1$.综上，直线 l 的方程为 $x=0$ 或 $y=1$ 或 $y=x+1$.

(2)结合(1)知抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$，直线 MF 的方程为 $y=-x+1$.

联立$\begin{cases}y^2=4x,\\y=-x+1,\end{cases}$ 得 $y^2+4y-4=0$，设 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，

则 $y_1+y_2=-4$，$y_1y_2=-4$，所以$|y_1-y_2|=4\sqrt{2}$，所以 $S_{\triangle OAB}=\dfrac{1}{2}OF|y_1-y_2|=2\sqrt{2}$.

3.已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F，过焦点 F 的直线与抛物线交于点 $A(x_1，y_1)$，$B(x_2，y_2)$，则 $y_1^2+y_2^2$的最小值为(　　)A.4　B.6　C.8　D.10

解析 由焦点弦的性质知，$y_1y_2=-4$，即$|y_1|\cdot|y_2|=4$，则 $y_1^2+y_2^2\geqslant2|y_1|\cdot|y_2|=8$，

当且仅当$|y_1|=|y_2|=2$ 时，取等号.故 $y_1^2+y_2^2$的最小值为 8. **答案**　C