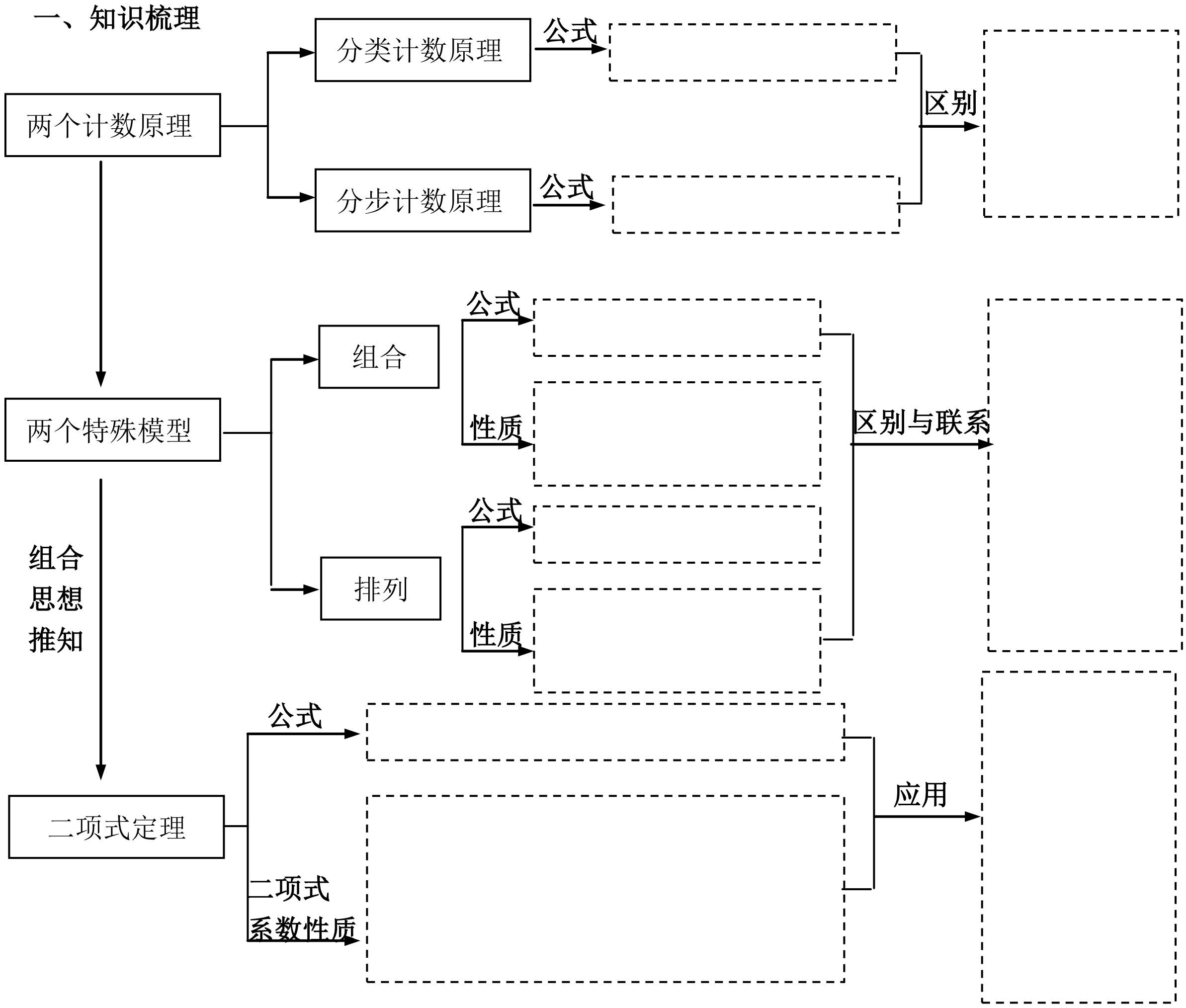
排列组合、二项式定理

一、知识梳理



二、同伴互学

例 1. 有 4 名男生、3 名女生，全体排成一行，问下列情形各有多少种不同的排法？

（1）甲不在中间也不在两端；　　（2）甲、乙两人必须排在两端；

（3）甲不站排头，乙不站排尾；　（4）甲乙站在一起；

（5）男女相间；　（6）女生按身高从高到低，从左到右排序

（7）女生互不相邻；（8）恰有 2 位女生相邻；（9）甲与乙相邻，但与丙不相邻

（10）甲乙在丙的同侧.

类题 1　有 6 本不同的书按下列分配方式分配，问共有多少种不同的分配方式？

（1）　分成 1 本、2 本、3 本三组；

（2）　分给甲、乙、丙三人，其中一个人 1 本，一个人 2 本，一个人 3 本；

（3）　分成每组都是 2 本的三个组；

（4）　分给甲、乙、丙三人，每个人 2 本；

（5）　分给 5 人每人至少 1 本.

类题 2　某大学志愿者协会有 6 名男同学，4 名女同学．在这 10 名同学中，3 名同学来自数学学院，其余 7 名同学来自物理、化学等其他互不相同的七个学院．现从这 10 名同学中随机选取 3 名同学，到希望小学进行支教活动（每位同学被选到的可能性相同）.

（1）求选出的 3 名同学是来自互不相同学院的概率；

（2）设 X 为选出的 3 名同学中女同学的人数，求随机变量 X 的分布列和数学期望.

【解】本小题主要考查古典概型及其概率计算公式，互斥事件、离散型随机变量的分布列与数学期望等基础知识．考查运用概率知识解决简单实际问题的能力.

（Ⅰ）设“选出的 3 名同学来自互不相同的学院”为事件 A，则

$$P(A)=\frac{C_3^1\cdot C_7^2+C_3^0\cdot C_7^3}{C_{10}^3}=\frac{49}{60}.$$

所以，选出的 3 名同学来自互不相同学院的概率为 $\frac{49}{60}$.

（Ⅱ）随机变量 X 的所有可能值为 0，1，2，3.

$$P(x=k)=\frac{C_4^k\cdot C_6^{3-k}}{C_{10}^3}\ (k=0,1,2,3).$$

所以，随机变量 X 的分布列是

X	0	1	2	3
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

随机变量 X 的数学期望 $E\left(X\right)=0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$.

类题 3 某校校运会期间，来自甲、乙两个班级共计 6 名学生志愿者随机平均分配到后勤组、保洁组、检录组，并且后勤组至少有一名甲班志愿者的概率为 $\frac{4}{5}$

（1）求 6 名志愿者中来自甲、乙两个班级的学生各有几人

（2）设在后勤组的甲班志愿者的人数为 X ,求随机变量 X 的概率分布列及数学期望 $E(X)$

例 2 已知二项式 $(2x+\frac{1}{\sqrt{x}})^n$（$n\in N^*$）的展开式中第 2 项与第 3 项的二项式系数之比是 2：5， 按要求完成以下问题：

（1）求 n 的值；（2）求展开式中含 x^3 的项；（3）求展开式中的常数项；（4）二项式系数最大的项；（5）求展开式中的所有有理项的系数之和；（6）系数最大的项；（7）展开式中所有项的二项式系数之和；（8）$C_6^0 2^6+C_6^1 2^5+C_6^2 2^4+C_6^3 2^3+C_6^4 2^2+C_6^5 2^1+C_6^6 2^0$ 的值；（9）求展开式 $(4x^2+4\sqrt{x}+\frac{1}{x})^n$ 中的常数项.

类题 1 从函数角度看，组合数 C_n^r 可看成是以 r 为自变量的函数 $f(r)$，其定义域是 $\{r|r\in N, r\leqslant n\}$.

（1）证明： $f(r)=\frac{n-r+1}{r}f(r-1)$；

（2）利用（1）的结论，证明：当 n 为偶数时，$(a+b)^n$ 的展开式中最中间一项的二项式系数最大.

23．证明：（1）$\because f(r)=C_n^r=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$， ……………… 1 分

又$\because f(r-1)=C_n^{r-1}=\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$， ……………… 3 分

$\therefore \dfrac{n-r+1}{r}f(r-1)=\dfrac{n-r+1}{r}\dfrac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}=\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$.

则 $f(r)=\dfrac{n-r+1}{r}f(r-1)$ 成立. ……………… 5 分

（2）设 $n=2k$，

$\because f(r)=\dfrac{n-r+1}{r}f(r-1)$，$f(r-1)>0$，$\therefore \dfrac{f(r)}{f(r-1)}=\dfrac{2k-r+1}{r}$.

令 $f(r)\geqslant f(r-1)$，$\therefore \dfrac{2k-r+1}{r}\geqslant 1$．则 $r\leqslant k+\dfrac{1}{2}$（等号不成立）. ………… 7 分

$\therefore r=1$，2，…，k 时，$f(r)>f(r-1)$ 成立.

反之，当 $r=k+1$，$k+2$，…，$2k$ 时，$f(r)<f(r-1)$ 成立. ………… 9 分

$\therefore f(k)=C_{2k}^k$ 最大；

即 $(a+b)^n$ 的展开式中最中间一项的二项式系数最大. ………… 10 分

类题 2 设 $n\in \mathrm{N}_+$，$(1+\sqrt{2})^n=\sqrt{2}a_n+b_n$（$a_n$、$b_n$ $\in \mathrm{Z}$）.

（1）求 a_5+b_5 的值；

（2）证明：b_n 为奇数.

23. 解：（1）当 $n=5$ 时，$\left(1+\sqrt{2}\right)^5=C_5^0+C_5^1\sqrt{2}+C_5^2\left(\sqrt{2}\right)^2+\cdots+C_5^5\left(\sqrt{2}\right)^5$

$=\left[C_5^0+C_5^2\left(\sqrt{2}\right)^2+C_5^4\left(\sqrt{2}\right)^4\right]+\left[C_5^1\sqrt{2}+C_5^3\left(\sqrt{2}\right)^3+C_5^5\left(\sqrt{2}\right)^5\right]=41+29\sqrt{2}$，

故 $a_5=29$，$b_5=41$，所以 $a_5+b_5=70$.

（2）答数是否定的，事实上 b_n 是奇数，而 $b_n=2^{2013}$ 是偶数，故不存在不存在正整数 n，使 $b_n=2^{2013}$.

下面证明是对任意正整数 n，b_n 是奇数.

证法一：（用数学归纳法证明）

（i）当$n=1$时，易知$b_1=1$，为奇数；

（ii）假设当$n=k$时，$\left(1+\sqrt{2}\right)^k=\sqrt{2}a_k+b_k$，其中$b_k$为奇数；

则当$n=k+1$时，

$\left(1+\sqrt{2}\right)^{k+1}=\left(1+\sqrt{2}\right)^k\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)=\left(\sqrt{2}a_k+b_k\right)\cdot\left(1+\sqrt{2}\right)=\sqrt{2}\left(a_k+b_k\right)+\left(b_k+2a_k\right)$，

所以$b_{k+1}=b_k+2a_k$，又a_k、$b_k\in Z$，所以$2a_k$是偶数，法一

而由归纳假设知b_k是奇数，故b_{k+1}也是奇数.

综上（i）、（ii）可知，b_n的值一定是奇数.

证法二：因为$\left(1+\sqrt{2}\right)^n=C_n^0+C_n^1\sqrt{2}+C_n^2\left(\sqrt{2}\right)^2+\cdots+C_n^n\left(\sqrt{2}\right)^n$

当n为奇数时，$b_n=C_n^0+C_n^2\left(\sqrt{2}\right)^2+C_n^4\left(\sqrt{2}\right)^4+\cdots+C_n^{n-1}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$

则当$n=1$时，$b_1=1$是奇数；当$n\geq 3$时，

因为其中$C_n^2\left(\sqrt{2}\right)^2+C_n^4\left(\sqrt{2}\right)^4+\cdots+C_n^{n-1}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$中必能被 2 整除，所以为偶数，

于是，$b_n=C_n^0+C_n^2\left(\sqrt{2}\right)^2+C_n^4\left(\sqrt{2}\right)^4+\cdots+C_n^{n-1}\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$必为奇数；

当n为偶数时，$b_n=C_n^0+C_n^2\left(\sqrt{2}\right)^2+C_n^4\left(\sqrt{2}\right)^4+\cdots+C_n^n\left(\sqrt{2}\right)^n$

其中$C_n^2\left(\sqrt{2}\right)^2+C_n^4\left(\sqrt{2}\right)^4+\cdots+C_n^n\left(\sqrt{2}\right)^n$均能被 2 整除，于是$b_n$必为奇数.

综上可知，$\left\{b_n\right\}$各项均为奇数.