

江苏省仪征中学 2020—2021 学年度第一学期高二数学

周末练习（10）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，共 40.0 分）

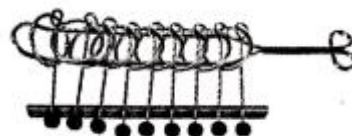
1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2^n - 1$ ，则 $a_2 \cdot a_6 = (\quad)$

A. $\frac{1}{64}$ B. $\frac{1}{16}$ C. 16 D. 64

2. 如图所示，九连环是中国的一种古老的智力游戏，它环环相扣，趣味无穷．它主要由九个圆环及框架组成，每个圆环都连有一个直杆，各直杆在后一个圆环内穿过，九个直杆的另一端用平板或者圆环相对固定，圆环在框架上可以解下或者套上．九连环游戏按某种规则将九个环全部从框架上解下或者全部套上．将第 n 个圆环解下最少需要移动的次數记为 $f(n)$ ($n \leq 9$ 且 $n \in N^*$)，已知 $f(1) = 1, f(2) = 1$ ，

且通过该规则可得 $f(n) = f(n-1) + 2f(n-2) + 1$ ，则

解下第 5 个圆环最少需要移动的次數为($\quad$)



A. 7 B. 16 C. 19 D. 21

3. 已知 F_1, F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的左、右焦点， P 是椭圆上一点，若 $S_{\triangle F_1PF_2} = 4$ ，则 $\angle F_1PF_2$ 等于($\quad$)

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

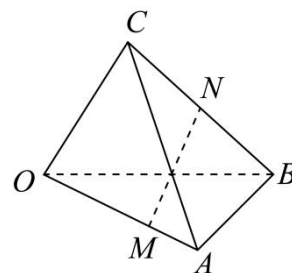
4. 如图，空间四边形 $OABC$ 中， $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ， $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ， $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ ，且 $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{MA}$ ， $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC}$ ，则 $\overrightarrow{MN}$ 等于($\quad$)

A. $\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

B. $\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c}$

C. $-\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

D. $\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{2}{3}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$



5. 已知向量 $\vec{a} = (1, 2, 3)$ ， $\vec{b} = (-2, -4, -6)$ ， $|\vec{c}| = \sqrt{14}$ ，若 $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = 7$ ，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为($\quad$)

A. 30° B. 60° C. 120° D. 150°

6. 已知 $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 3)$ ， $\overrightarrow{OB} = (2, 1, 2)$ ， $\overrightarrow{OC} = (1, 1, 2)$ ，点 M 在直线 OC 上运动．当 $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ 取最小值时，点 M 的坐标为($\quad$)

A. (2, 2, 4)

B. $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$

C. $(\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{10}{3})$

D. $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$

7. 抛物线 $C: y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 过 F 且斜率为 $\sqrt{3}$ 的直线 l 与抛物线 C 交于 M, N 两点, 点 P 为抛物线 C 上的动点, 且点 P 在 l 的左侧, 则 $\triangle PMN$ 面积的最大值为()

A. $\sqrt{3}$ B. $2\sqrt{3}$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{16\sqrt{3}}{9}$

8. 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $S_{17} > 0, S_{18} < 0$, 则 $\frac{S_1}{a_1}, \frac{S_2}{a_2}, \dots, \frac{S_{17}}{a_{17}}$ 中最大的项为()

A. $\frac{S_6}{a_6}$ B. $\frac{S_7}{a_7}$ C. $\frac{S_8}{a_8}$ D. $\frac{S_9}{a_9}$

二、多项选择题 (本大题共 4 小题, 共 20.0 分)

9. 关于空间向量, 以下说法正确的是()

A. 空间中的三个向量, 若有两个向量共线, 则这三个向量一定共面
 B. 若对空间中任意一点 O , 有 $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$, 则 P, A, B, C 四点共面
 C. 设 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 是空间中的一组基底, 则 $\{\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}\}$ 也是空间的一组基底
 D. 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$, 则 $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$ 是钝角

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的首项为 4, 且满足 $2(n+1)a_n - na_{n+1} = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$, 则()

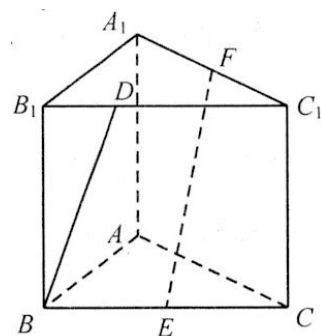
A. $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 为等差数列 B. $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 4$
 C. $\{a_n\}$ 为递增数列 D. $\left\{\frac{a_n}{2^{n+1}}\right\}$ 的前 n 项和 $T_n = \frac{n^2 + n}{2}$

11. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 不经过原点 O 、斜率为 k 的直线与椭圆相交于 A, B 两点, M 为线段 AB 的中点. 下列结论正确的是()

A. 直线 AB 与 OM 垂直 B. 若点 M 坐标为 $(1, \frac{1}{2})$, 则直线方程为 $x + 2y - 2 = 0$
 C. 若直线方程为 $y = x + 1$, 则点 M 坐标为 $(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$
 D. 若直线方程为 $y = x + 2$, 则 $AB = \frac{4\sqrt{2}}{5}$

12. 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = AC = AA_1 = 2$, E, F 分别是 BC, A_1C_1 的中点, D 在线段 B_1C_1 上, 则下面说法中正确的有()

A. $EF \parallel$ 平面 AA_1B_1B B. 若 D 是 B_1C_1 上的中点, 则 $BD \perp EF$
 C. 直线 EF 与平面 ABC 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$
 D. 直线 BD 与直线 EF 所成角最小时, 线段 BD 长为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$



三、填空题（本大题共 4 小题，共 20.0 分）

13. 已知直线 l 与平面 α 垂直，直线 l 的一个方向向量 $\vec{u} = (1, -3, z)$ ，向量 $\vec{v} = (3, -2, 1)$ 与平面 α 平行，则 $z =$ _____.
14. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中， $a_2 a_{10} = 6a_6$ ，等差数列 $\{b_n\}$ 中， $b_4 + b_6 = a_6$ ，则数列 $\{b_n\}$ 的前 9 项和为_____.
15. 空间直角坐标系 $O - xyz$ 中，经过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 且法向量为 $\vec{m} = (A, B, C)$ 的平面方程为 $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ ，经过点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 且一个方向向量为 $\vec{n} = (\mu, \nu, \omega) (\mu\nu\omega \neq 0)$ 的直线 l 的方程为 $\frac{x-x_0}{\mu} = \frac{y-y_0}{\nu} = \frac{z-z_0}{\omega}$ ，阅读上面的材料并解决下面问题：
现给出平面 α 的方程为 $3x - 5y + z - 7 = 0$ ，直线 l 是两个平面 $x - 3y + 7 = 0$ 与 $4y + 2z + 1 = 0$ 的交线，则平面 α 的一个法向量为_____，直线 l 与平面 α 成角的正弦值为_____.
16. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，与双曲线 $\frac{x^2}{m^2} - \frac{y^2}{n^2} = 1 (m > 0, n > 0)$ 具有相同焦点 F_1 、 F_2 ，且在第一象限交于点 P ，椭圆与双曲线的离心率分别为 e_1 、 e_2 ，若 $\angle F_1 P F_2 = \frac{\pi}{3}$ ，则 $e_1^2 + e_2^2$ 的最小值是_____.

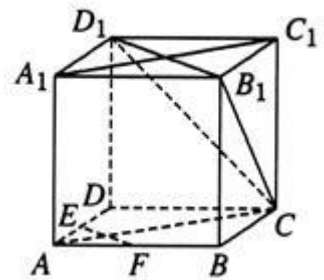
四、解答题（本大题共 6 小题，共 70.0 分）

17. 已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，且 $a_3 = 6$ ， $a_6 = 0$. (I) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；
(II) 若等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 3$ ， $b_2 = a_4 + a_5$ ，求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和公式.

18. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E ， F 分别为棱 AD ， AB 的中点.

(1) 求证： $EF \parallel$ 平面 CB_1D_1 ；

(2) 求证：平面 $CAA_1C_1 \perp$ 平面 CB_1D_1 .



19. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n = 2a_n - 2n + 1$.

(1) 求 a_n 和 S_n ；

(2) 设数列 $\{S_n\}$ 的前 n 项和为 T_n ，若不等式 $T_n - t \cdot 2^n \geq 0$ 对于 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立，求 t 的取值范围.

20. 在平面直角坐标系 xOy 中, 已知 $\triangle ABC$ 的顶点 A 的坐标为 $(0,1)$, 点 B 在 y 轴上移动, 且 $\angle ABC = \angle ACB$, 线段 BC 的中点为 D , 且点 D 的纵坐标为 0 , 过点 $E(0,2)$ 的直线与 C 点的轨迹交于 P, Q 两点, 以 PQ 为直径的圆交 y 轴于 M, N 两点.

(I) 求 C 点的轨迹方程.

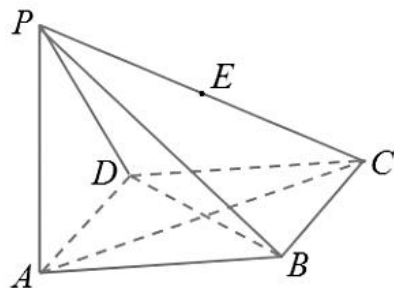
(II) $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 是否为定值? 若是, 求出 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ 的值; 若不是, 请说明理由.

21. 如图, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为菱形且 $\angle BAD = 60^\circ$, $PA \perp$ 底面 $ABCD$, $AB = 2, PA = 2\sqrt{3}$, E 为 PC 的中点.

(1) 求直线 DE 与平面 PAC 所成角的大小;

(2) 求二面角 $E-AD-C$ 平面角的正切值;

(3) 在线段 PC 上是否存在一点 M , 使 $PC \perp$ 平面 MBD 成立. 如果存在, 求出 MC 的长; 如果不存在, 请说明理由.



22. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(-\sqrt{2}, 1)$, 离心率是 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 直线 l 过椭圆的右焦点 F , 且与椭圆交于 M, N 两点 (M, N 两点均位于 y 轴的右侧), 与 y 轴交于 Q 点.

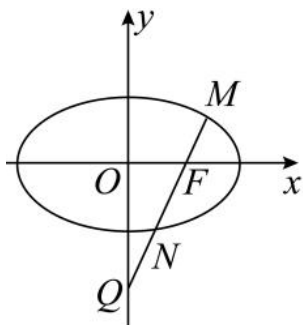


图1

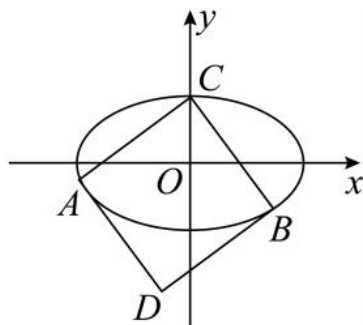


图2

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 如图 1, 是否存在直线 l , 使得 $\frac{1}{|QM|} + \frac{1}{|QN|} = \frac{4}{|QF|}$ 成立? 若存在, 求出 l 的方程; 若不存在, 请说明理由.

(3) 如图 2, 若点 A, B 在椭圆上, 点 C 为椭圆上顶点, 且四边形 $CADB$ 是矩形, 求矩形 $CADB$ 的面积 S 的最大值.

答案和解析

1. 【答案】D

解：当 $n = 1$ 时， $a_1 = S_1 = 2^1 - 1 = 1$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $a_n = S_n - S_{n-1} = 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ ，

则 $a_2 = 2^1 = 2$ ； $a_6 = 2^5 = 32$ ，

所以 $a_2 \cdot a_6 = 64$ 。

故选 D。

2. 【答案】B

解：由已知 $f(3) = f(2) + 2f(1) + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$ ，

$f(4) = f(3) + 2f(2) + 1 = 4 + 2 + 1 = 7$ ，

$f(5) = f(4) + 2f(3) + 1 = 7 + 8 + 1 = 16$ 。

故选 B。

3. 【答案】D

解：由 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，可得 $a = 2\sqrt{2}$ ， $b = 2$ ， $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2$ ，

设 $P(x_1, y_1)$ ，且 $y_1 > 0$ ，

则 $S_{\triangle F_1PF_2} = \frac{1}{2} |F_1F_2| \cdot y_1 = \frac{1}{2} \times 4 \times y_1 = 4$ ，

解得 $y_1 = 2$ ，

此时点 P 的坐标为 $P(0, 2)$ ，

$\therefore |PF_1| = |PF_2| = 2\sqrt{2}$ ，

$\therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2$ ，

$\therefore \angle F_1PF_2 = 90^\circ$ ，

根据椭圆的对称性，当 $y_1 < 0$ 时， $\angle F_1PF_2 = 90^\circ$ 仍成立。

故选 D。

4. 【答案】C

解：由题意 $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$

$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB})$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC},$$

$$\text{又 } \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c},$$

$$\therefore \overrightarrow{MN} = -\frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}.$$

故选 C.

5. 【答案】C

$$\text{解: } \because \vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (-2, -4, -6),$$

$$\therefore \vec{b} = -2\vec{a}, \therefore \vec{a} + \vec{b} = -\vec{a},$$

$$\therefore (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = -\vec{a} \cdot \vec{c} = 7, \therefore \vec{a} \cdot \vec{c} = -7,$$

$$\therefore \cos \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|}$$

$$= \frac{-7}{\sqrt{14} \times \sqrt{14}} = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{又 } \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \in [0^\circ, 180^\circ],$$

$$\therefore \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle = 120^\circ.$$

故选 C.

6. 【答案】D

$$\text{解: 设 } \overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OC}, \text{ 即 } \overrightarrow{OM} = \lambda \overrightarrow{OC} = (\lambda, \lambda, 2\lambda), \text{ 故 } M(\lambda, \lambda, 2\lambda),$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM}) \\ &= (1 - \lambda, 2 - \lambda, 3 - 2\lambda) \cdot (2 - \lambda, 1 - \lambda, 2 - 2\lambda) \\ &= 6\lambda^2 - 16\lambda + 10 = 6\left(\lambda - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

$$\text{当 } \lambda = \frac{4}{3} \text{ 时, 向量数量积有最小值, 此时 } M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

故选 D.

7. 【答案】D

$$\text{解: 由题意可知直线 } l \text{ 的方程为 } y = \sqrt{3}(x - 1),$$

$$\text{与抛物线 } C: y^2 = 4x \text{ 联立可得 } 3x^2 - 10x + 3 = 0,$$

$$\text{则 } |MN| = x_P + x_Q + p = \frac{10}{3} + 2 = \frac{16}{3}.$$

$$\text{设与直线 } l \text{ 平行的直线 } y = \sqrt{3}x + m, \text{ 代入抛物线 } C \text{ 的方程中可得}$$

$$3x^2 - (2\sqrt{3}m - 4)x + m^2 = 0,$$

由 $\Delta = (2\sqrt{3}m - 4)^2 - 12m^2 = 0$, 得 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

直线 l 与直线 $y = \sqrt{3}x + \frac{\sqrt{3}}{3}$ 的距离 $d = \frac{\left|\frac{\sqrt{3}}{3} - (-\sqrt{3})\right|}{\sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$,

故 ΔPMN 面积的最大值为 $\frac{1}{2} \times \frac{16}{3} \times \frac{2\sqrt{3}}{3} = \frac{16\sqrt{3}}{9}$.

故选 D .

8. 【答案】 D

解: 等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 满足 $S_{17} > 0, S_{18} < 0$,

则有 $\frac{17(a_1 + a_{17})}{2} > 0, \frac{18(a_1 + a_{18})}{2} < 0$,

所以 $\frac{17 \times 2a_9}{2} > 0, \frac{18(a_9 + a_{10})}{2} < 0$,

则 $a_9 > 0, a_{10} < 0$,

$\therefore$ 等差数列 $\{a_n\}$ 为递减数列,

故可知 $a_1, a_2, \dots, a_9$ 为正, $a_{10}, a_{11}, \dots$ 为负,

$\therefore S_1, S_2, \dots, S_{17}$ 为正,

又 $\because S_1 < S_2 < \dots < S_9, a_1 > a_2 > \dots > a_9$,

则 $\frac{S_1}{a_1}, \frac{S_2}{a_2}, \dots, \frac{S_{17}}{a_{17}}$ 中最大的项为 $\frac{S_9}{a_9}$.

故选 D .

9. 【答案】 ABC

解: 根据空间两个向量共线则它们与另一个向量必共面, A 正确;

根据空间四点满足 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB} + z\overrightarrow{OC}$ 且 $x + y + z = 1$ 时, 四点 P, A, B, C 共面, B 正确;

根据向量 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 是空间的一组基底, 知它们是不共面的非零向量, 所以向量 $\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{c} + \vec{a}$ 彼此不共线且非零向量, C 正确;

若 $\vec{a}, \vec{b}$ 共线反向, 数量积小于 0, 但夹角为平角, D 错误,

故选 ABC .

10. 【答案】 CD

解: 因为 $a_1 = 4, 2(n+1)a_n - na_{n+1} = 0 (n \in \mathbb{N}^*)$,

所以 $a_n \neq 0$, 且 $\frac{2a_n}{n} - \frac{a_{n+1}}{n+1} = 0$,

所以 $\frac{\frac{a_{n+1}}{n+1}}{\frac{a_n}{n}} = 2$,

所以数列 $\{\frac{a_n}{n}\}$ 是首项为 $\frac{a_1}{1} = 4$, 公比为 2 的等比数列, 故 A 错误;

所以 $\frac{a_n}{n} = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$, 则 $a_n = n \cdot 2^{n+1}$,

因为 $S_n = 1 \times 2^2 + 2 \times 2^3 + \cdots + n \cdot 2^{n+1}$,

所以 $2S_n = 1 \times 2^3 + 2 \times 2^4 + \cdots + n \cdot 2^{n+2}$,

以上两式相减得:

$$\begin{aligned} -S_n &= 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{n+1} - n \cdot 2^{n+2} \\ &= \frac{2^2 \cdot (1 - 2^n)}{1 - 2} - n \cdot 2^{n+2} \end{aligned}$$

$$= (1 - n) \cdot 2^{n+2} - 4,$$

所以 $S_n = (n - 1) \cdot 2^{n+2} + 4$, 故 B 错误;

因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1) \cdot 2^{n+2}}{n \cdot 2^{n+1}} = 2(1 + \frac{1}{n}) > 1$,

所以 $a_{n+1} > a_n$, 即数列 $\{a_n\}$ 是递增数列, 故 C 正确;

因为 $a_n = n \cdot 2^{n+1}$, 所以 $\frac{a_n}{2^{n+1}} = n$,

所以 $T_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$, 故 D 正确.

故选 CD.

11. 【答案】BD

解: 因为在椭圆中, 根据椭圆的中点弦的性质 $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{4} \neq -1$, 所以 A 项不正确;

根据 $k_{AB} \cdot k_{OM} = -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{1}{4}$, 而 $k_{OM} = \frac{1}{2}$, 所以 $k_{AB} = -\frac{1}{2}$, 所以直线方程为 $y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}(x - 1)$,

即 $x + 2y - 2 = 0$, 所以 B 项正确;

若直线方程为 $y = x + 1$, 点 $M(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, 则 $k_{AB} \cdot k_{OM} = 1 \cdot (-2) = -2 \neq -\frac{1}{4}$, 所以 C 项不正确;

若直线方程为 $y = x + 2$, 与椭圆方程 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 联立, 得 $x^2 + 4(x + 2)^2 - 4 = 0$, 整理得

$$5x^2 + 16x + 12 = 0, \text{ 解得 } x_1 = -2, x_2 = -\frac{6}{5},$$

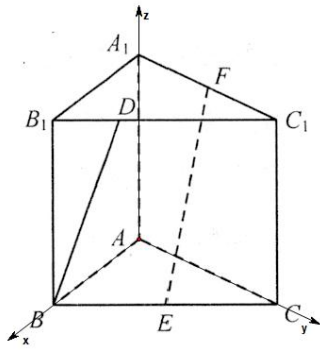
所以 $AB = \sqrt{1+1^2} \times |\frac{4}{5}| = \frac{4\sqrt{2}}{5}$, 所以 D 正确.

故选 BD .

12. 【答案】 ACD

解: $\because$ 直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$,

$\therefore$ 以点 A 为坐标原点, AB, AC, AA_1 所在直线分别为 x, y, z 轴建立空间直角坐标系如图,



$\because AB = AC = AA_1 = 2$, E, F 分别是 BC, A_1C_1 的中点, D 在线段 B_1C_1 上,

$\therefore A(0,0,0), B(2,0,0), C(0,2,0), E(1,1,0), F(0,1,2), A_1(0,0,2)$,

设 $D(x, -x+2, 2)$, $0 \leq x \leq 2$,

对于 A , $\overrightarrow{AC} = (0, 2, 0)$ 为平面 AA_1B_1B 的法向量, $\overrightarrow{EF} = (-1, 0, 2)$,

则 $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{EF} = (0, 2, 0) \cdot (-1, 0, 2) = 0$, 又 EF 不在平面 AA_1B_1B 内,

$\therefore EF \parallel$ 平面 AA_1B_1B , 故 A 正确;

对于 B , 当 D 是 B_1C_1 上的中点时, $D(1, 1, 2)$, $\overrightarrow{BD} = (-1, 1, 2)$, $\overrightarrow{EF} = (-1, 0, 2)$,

则 $\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{EF} = (-1, 1, 2) \cdot (-1, 0, 2) = 5 \neq 0$,

$\therefore BD$ 与 EF 不垂直, 故 B 错误;

对于 C , $\overrightarrow{AA_1} = (0, 0, 2)$ 为平面 ABC 的法向量, $\overrightarrow{EF} = (-1, 0, 2)$, 设直线 EF 与平面 ABC 所成角为 θ ,

则 $\sin \theta = |\cos \langle \overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{EF} \rangle| = \left| \frac{\overrightarrow{AA_1} \cdot \overrightarrow{EF}}{|\overrightarrow{AA_1}| \cdot |\overrightarrow{EF}|} \right| = \frac{4}{2 \times \sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, 故 C 正确;

对于 D , 设 $\overrightarrow{B_1D} = \lambda \overrightarrow{B_1C_1} = (-2\lambda, 2\lambda, 0)$, $(0 \leq \lambda \leq 1)$,

则 $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{B_1D} = (-2\lambda, 2\lambda, 2)$, $\overrightarrow{EF} = (-1, 0, 2)$, 设直线 BD 与直线 EF 所成角为 φ ,

则 $\cos \varphi = \frac{|\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{EF}|}{|\overrightarrow{BD}| \cdot |\overrightarrow{EF}|} = \frac{\lambda+2}{\sqrt{2\lambda^2+1} \times \sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{(\frac{3}{\lambda+2}-\frac{4}{3})^2 + \frac{2}{9}}}$,

当 $\frac{3}{\lambda+2} - \frac{4}{3} = 0$ 即 $\lambda = \frac{1}{4}$ 时, $\cos \varphi$ 取最大值, 此时直线 BD 与直线 EF 所成角最小,

$\overrightarrow{BD} = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2)$, $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 + 4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 故 D 正确.

故选 ACD .

13. 【答案】 -9

解：由条件可知 $\vec{u} = (1, -3, z)$ 是平面 α 的法向量，

又向量 $\vec{v} = (3, -2, 1)$ 与平面 α 平行，

故 $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$,

即 $3 + 9 + z = 0$, $z = -9$.

故答案为： -9 .

14. 【答案】 27

解：等比数列 $\{a_n\}$ 中， $\because a_2 a_{10} = 6a_6$,

$$\therefore a_6^2 = 6a_6,$$

$$\because a_6 \neq 0,$$

$$\therefore a_6 = 6,$$

$$\therefore b_4 + b_6 = 6,$$

$$\therefore \text{等差数列 } \{b_n\} \text{ 的前 } 9 \text{ 项和为 } S_9 = \frac{9(b_1 + b_9)}{2} = \frac{9(b_4 + b_6)}{2} = \frac{9 \times 6}{2} = 27.$$

故答案为 27 .

15. 【答案】 $(3, -5, 1); \frac{\sqrt{10}}{35}$

【解析】

解： $\because$ 平面 α 的方程为 $3x - 5y + z - 7 = 0$, $\therefore$ 平面 α 的法向量可取 $\vec{m} = (3, -5, 1)$

平面 $x - 3y + 7 = 0$ 的法向量为 $\vec{a} = (1, -3, 0)$, 平面 $4y + 2z + 1 = 0$ 的法向量为 $\vec{b} = (0, 4, 2)$,

设两平面的交线的方向向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$,

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{a} = x - 3y = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{b} = 4y + 2z = 0 \end{cases} \text{ 取 } \vec{n} = (3, 2, -1),$$

$$\text{则直线 } l \text{ 与平面 } \alpha \text{ 所成角的大小为 } \theta, \sin \theta = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{|3 \times 3 - 5 \times 2 - 1 \times 1|}{\sqrt{3^2 + (-5)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{10}}{35}.$$

$$\text{故答案为 } (3, -5, 1); \frac{\sqrt{10}}{35}$$

16. 【答案】 $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$

解：由题意设焦距为 $2c$, 椭圆长轴长为 $2a$, 双曲线实轴为 $2m$,

由双曲线的定义 $|PF_1| - |PF_2| = 2m$,

由椭圆定义 $|PF_1| + |PF_2| = 2a$,

可得 $|PF_1| = m + a$, $|PF_2| = a - m$,

又 $\angle F_1PF_2 = \frac{\pi}{3}$,

$$|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |PF_1| \cdot |PF_2| = 4c^2,$$

可得 $(m + a)^2 + (a - m)^2 - (m + a) \cdot (a - m) = 4c^2$,

$$\text{得 } a^2 + 3m^2 = 4c^2,$$

$$\text{即 } \frac{a^2}{c^2} + \frac{3m^2}{c^2} = 4,$$

$$\text{可得 } \frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4,$$

$$\begin{aligned} \text{则 } e_1^2 + e_2^2 &= \frac{1}{4}(e_1^2 + e_2^2) \left(\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + 3 + \frac{e_2^2}{e_1^2} + \frac{3e_1^2}{e_2^2} \right) \end{aligned}$$

$$\geq \frac{1}{4}(4 + 2\sqrt{3}) = \frac{2+\sqrt{3}}{2},$$

当且仅当 $e_2^2 = \sqrt{3}e_1^2$, 且 $\frac{1}{e_1^2} + \frac{3}{e_2^2} = 4$, 上式取得等号,

可得 $e_1^2 + e_2^2$ 的最小值为 $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

故答案为 $\frac{2+\sqrt{3}}{2}$.

17. 【答案】解: (I) $\because \{a_n\}$ 为等差数列, 且 $a_3 = 6$, $a_6 = 0$.

$$\therefore \begin{cases} a_3 = a_1 + 2d = 6 \\ a_6 = a_1 + 5d = 0 \end{cases}$$

解得 $d = -2$, $a_1 = 10$,

$$\therefore a_n = 10 + (n - 1) \times (-2) = -2n + 12.$$

(II) $\because$ 等比数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1 = 3$,

$$b_2 = a_4 + a_5 = (-8 + 12) + (-10 + 12) = 6,$$

$$\therefore q = \frac{6}{3} = 2,$$

$\therefore \{b_n\}$ 的前 n 项和公式为:

$$S_n = \frac{3(1-2^n)}{1-2} = 3 \times 2^n - 3.$$

18. 【答案】证明: (1) 以 DA , DC , DD_1 所在直线分别为 x 轴, y 轴, z 轴

建立空间直角坐标系如图所示,

设正方体的棱长为 2,

则 $E(1,0, 0)$, $F(2,1, 0)$,

所以 $\overrightarrow{EF} = (1,1,0)$.

又因为 $C(0,2, 0)$, $D_1(0,0, 2)$, $B_1(2,2, 2)$,

设平面 CB_1D_1 的一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x,y,1)$.

因为 $\overrightarrow{CD_1} = (0, -2, 2)$, $\overrightarrow{CB_1} = (2, 0, 2)$,

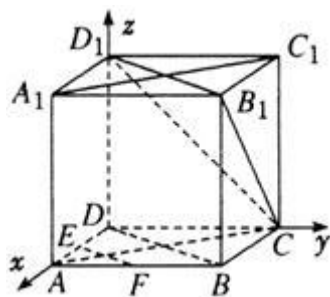
$$\text{由} \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CD_1} = 0, \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{CB_1} = 0, \end{cases} \text{得} \begin{cases} -2y + 2 = 0, \\ 2x + 2 = 0, \end{cases}$$

$$\text{所以} \begin{cases} y = 1, \\ x = -1, \end{cases} \text{所以} \vec{n}_1 = (-1, 1, 1),$$

所以 $\overrightarrow{EF} \cdot \vec{n}_1 = 0$.

又因 $EF \not\subset$ 平面 CB_1D_1 ,

所以 $EF \parallel$ 平面 CB_1D_1 .



(2) 连结 DB . 因为 $DB \perp AC$, $DB \perp AA_1$,

所以 $DB \perp$ 平面 CAA_1C_1 ,

所以 $\overrightarrow{DB} = (2, 2, 0)$ 是平面 CAA_1C_1 的一个法向量.

因为 $\vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DB} = 0$,

所以平面 $CAA_1C_1 \perp$ 平面 CB_1D_1 .

19. 【答案】解: (1) $S_1 = 2a_1 - 1$, 得 $a_1 = 1$ 由 $S_n = 2a_n - 2n + 1$ ①,

$$\text{得 } S_{n+1} = 2a_{n+1} - 2(n+1) + 1 \quad \textcircled{2},$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 得 } a_{n+1} = 2a_n - 2,$$

$$\text{即 } a_{n+1} = 2a_n + 2, \text{ 即 } a_{n+1} + 2 = 2(a_n + 2).$$

$$\therefore \{a_n + 2\} \text{ 为等比数列, 公比为 } 2, \text{ 首项 } a_1 + 2 = 3,$$

$$\therefore a_n + 2 = 3 \times 2^{n-1},$$

$$\therefore a_n = 3 \times 2^{n-1} - 2,$$

$$S_n = 2a_n - 2n + 1 = 3 \times 2^n - 2n - 3;$$

$$(2) T_n = 3(2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n) - [5 + 7 + \cdots + (2n + 3)]$$

$$= 6 \times 2^n - n^2 - 4n - 6,$$

$$\text{则 } T_n - t \cdot 2^n \geq 0, \text{ 即 } 6 \times 2^n - n^2 - 4n - 6 - t \cdot 2^n \geq 0,$$

$$\text{等价于 } t \leq 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n} \text{ 对于 } n \in N^* \text{ 恒成立,}$$

$$\text{设 } b_n = 6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n},$$

$$b_{n+1} - b_n = \left[6 - \frac{(n+1)^2 + 4(n+1) + 6}{2^{n+1}} \right] - \left(6 - \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n} \right)$$

$$= -\frac{n^2 + 6n + 11}{2^{n+1}} + \frac{n^2 + 4n + 6}{2^n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{2^{n+1}} > 0,$$

$$\text{所以数列 } \{b_n\} \text{ 为递增数列, 最小项为 } b_1 = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore t \leq \frac{1}{2}.$$

20. 【答案】解: (I) 设 C 点的坐标为(x,y),

因为点 D 的纵坐标为(0, -y),

$$\text{由 } |AB| = |AC|, \text{ 得 } (y+1)^2 = (y-1)^2 + x^2, \text{ 化简得, } x^2 = 4y,$$

$$\text{所以 } C \text{ 点的轨迹方程为: } x^2 = 4y (y \neq 0).$$

(II) 显然 PQ 的斜率存在,

设直线 PQ 的方程为 $y = kx + 2$, P 点的坐标为 (x_1, y_1) , Q 点的坐标为 (x_2, y_2) , PQ 的中点 R 的坐标为 (x_0, y_0) ,

$$\text{所以 } \begin{cases} y = kx + 2 \\ x^2 = 4y \end{cases}, \text{ 整理得, } x^2 - 4kx - 8 = 0,$$

所以 $\Delta = 16k^2 + 32 > 0, x_1 + x_2 = 4k, x_1 x_2 = -8$,

所以 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 2k, y_0 = kx_0 + 2 = 2k^2 + 2$, 即 R 点的坐标为 $(2k, 2k^2 + 2)$,

$$|PQ| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = 4\sqrt{(1+k^2)(2+k^2)},$$

所以以 PQ 为直径的圆的方程为: $(x-2k)^2 + (y-2k^2-2)^2 = 4(1+k^2)(2+k^2)$,

令 $x=0$, 即 $y^2 - (4k^2+4)y - 4 = 0$,

设点 M 的坐标为 $(0, y_3)$, 点 N 的坐标为 $(0, y_4)$,

所以 $y_3 y_4 = -4$,

所以 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = -4$ 为定值.

21.【答案】解: 连结对角线 AC 、 BD 相交于点 O , 连结 DE 、 OE ,

则根据中位线性质得到 $EO \parallel PA$,

$\because PA \perp$ 平面 $ABCD$, $\therefore EO \perp$ 平面 $ABCD$, $EO = \frac{1}{2}PA = \sqrt{3}$,

$\because$ 底面是菱形 $ABCD$,

$\therefore$ 以 O 为原点, OA 、 OB 、 OE 分别为 x , y , z 轴建立空间直角坐标系.

$\because \angle BAD = 60^\circ$, $AB = 2$, $PA = 2\sqrt{3}$,

$\therefore BD = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$,

$\therefore O(0,0, 0)$, $A(\sqrt{3},0, 0)$, $B(0,1, 0)$,

$C(-\sqrt{3},0, 0)$, $D(0,-1,0)$, $E(0,0, \sqrt{3})$, $P(\sqrt{3},0, 2\sqrt{3})$,

$\overrightarrow{DE} = (0,1,\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AD} = (-\sqrt{3}, -1,0)$, $\overrightarrow{CP} = (2\sqrt{3},0,2\sqrt{3})$.

(1) $\because$ 平面 PAC 的法向量为 $\overrightarrow{OD} = (0, -1,0)$,

$$|\cos \langle \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{DE} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{OD} \cdot \overrightarrow{DE}|}{|\overrightarrow{OD}| |\overrightarrow{DE}|} = \frac{|-1|}{1 \times 2} = \frac{1}{2},$$

$\therefore$ 设直线 DE 与平面 PAC 所成的角 θ , 有 $\sin \theta = \frac{1}{2}$,

$\therefore$ 直线 DE 与平面 PAC 所成的角为 30° ;

(2) 设二面角 $E-AD-C$ 的平面角为 α , α 是锐角,

$\therefore \cos \alpha$ 等于法向量夹角余弦的绝对值, 平面 ADC 的法向量为 $\overrightarrow{OE} = (0,0, \sqrt{3})$,

设平面 EAD 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$,

$$\therefore \begin{cases} \overrightarrow{AD} \cdot \vec{n} = 0 \\ \overrightarrow{DE} \cdot \vec{n} = 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} -\sqrt{3}x - y = 0 \\ y + \sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{取 } y = \sqrt{3}, \text{ 得到 } \vec{n} = (-1, \sqrt{3}, -1),$$

$$\therefore |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{OE} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{OE} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}| |\overrightarrow{OE}|} = \frac{|-\sqrt{3}|}{\sqrt{3} \times \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\text{即 } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \therefore \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \therefore \tan \alpha = 2,$$

故二面角 $E-AD-C$ 的平面角的正切值是 2.

(3) 设 PC 上存在点 M 使得 $PC \perp$ 平面 MBD , $MB \subset$ 平面 MBD , 则有 $PC \perp BM$,

$$\therefore \overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{BM} = 0, \text{ 设 } \overrightarrow{CM} = \lambda \overrightarrow{CP},$$

$$\therefore \overrightarrow{CM} = \lambda(2\sqrt{3}, 0, 2\sqrt{3}) = (2\sqrt{3}\lambda, 0, 2\sqrt{3}\lambda),$$

$$\therefore \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM} = (0, -1, 0) + (-\sqrt{3}, 0, 0) + (2\sqrt{3}\lambda, 0, 2\sqrt{3}\lambda)$$

$$= (2\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}, -1, 2\sqrt{3}\lambda),$$

$$\therefore 2\sqrt{3}(2\sqrt{3}\lambda - \sqrt{3}) + 0 + 2\sqrt{3} \times 2\sqrt{3}\lambda = 0,$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{4}, \therefore CM = \frac{1}{4}CP = \frac{1}{4} \times \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 0 + (2\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$\therefore$ 此时 $BM \perp PC$, 而 $BD \perp$ 平面 PAC , $PC \subset$ 平面 PAC ,

$\therefore BD \perp PC$, $BD \cap BM = B$, $BD, BM \subset$ 平面 MBD .

$\therefore PC \perp$ 平面 MBD .

故当 $MC = \frac{\sqrt{6}}{2}$ 时, 能使得 $PC \perp$ 平面 MBD .

$$22. \text{【答案】解: (1) 由题意可得 } \begin{cases} \frac{2}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1 \\ \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases},$$

$$\text{解得 } a^2 = 4, b^2 = 2, c^2 = 2,$$

$$\therefore \text{所求椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1;$$

(2) 假设存在符合条件的直线 l , 由已知得 l 的斜率存在,

$$\text{设为 } k_1, \text{ 则直线 } l \text{ 的方程为 } y = k_1(x - \sqrt{2}) \text{ 联立方程得: } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = k_1(x - \sqrt{2}) \end{cases},$$

$$\text{消去 } y \text{ 并整理得: } (1 + 2k_1^2)x^2 - 4\sqrt{2}k_1^2x + 4k_1^2 - 4 = 0,$$

由题意知 $\Delta > 0$ 恒成立,

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), x_1 > 0, x_2 > 0,$$

$$\text{则 } x_1 + x_2 = \frac{4\sqrt{2}k_1^2}{1+2k_1^2}, x_1x_2 = \frac{4k_1^2-4}{1+2k_1^2},$$

$$\text{由} \frac{1}{|QM|} + \frac{1}{|QN|} = \frac{4}{|QF|}, \text{ 得} \frac{|QF|}{|QM|} + \frac{|QF|}{|QN|} = 4,$$

$$\text{根据相似比得} \frac{c}{x_1} + \frac{c}{x_2} = 4,$$

$$\text{所以} x_1 + x_2 = 2\sqrt{2}x_1x_2 \Rightarrow k_1^2 = 2, \therefore k_1 = \pm\sqrt{2},$$

$$\text{故存在符合条件的直线 } l \text{ 的方程为 } y = \sqrt{2}(x - \sqrt{2}) \text{ 或 } y = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2}),$$

$$\text{即直线 } l \text{ 的方程为 } y = \sqrt{2}x - 2 \text{ 或 } y = -\sqrt{2}x + 2.$$

(3)由题意知直线 AC 不垂直于坐标轴, 且 $CA \perp CB$,

$$\text{可设直线 } AC: y = kx + \sqrt{2}, (k > 0),$$

$$\text{由} \begin{cases} y = kx + \sqrt{2} \\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (1 + 2k^2)x^2 + 4\sqrt{2}kx = 0,$$

$$\text{可得 } x_A = \frac{-4\sqrt{2}k}{1+2k^2},$$

$$\text{所以 } |CA| = \sqrt{1+k^2}|x_A - x_C| = \frac{4\sqrt{2}k\sqrt{1+k^2}}{1+2k^2},$$

$$\text{同理可得 } |CB| = \frac{4\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}}{2+k^2},$$

$$\begin{aligned} \text{因为矩形 } CADB \text{ 面积 } S &= 2S_{\triangle CAB} = |CA||CB| = \frac{4\sqrt{2}k\sqrt{1+k^2}}{1+2k^2} \times \frac{4\sqrt{2}\sqrt{1+k^2}}{k^2+2} \\ &= \frac{32(k^3+k)}{2k^4+5k^2+2} = \frac{32(k+\frac{1}{k})}{2(k^2+\frac{1}{k^2})+5}, \end{aligned}$$

$$\text{令 } t = k + \frac{1}{k}, (t \geq 2), \text{ 则 } 2t + \frac{1}{t} \geq \frac{9}{2}, \text{ 则 } S = \frac{32t}{2(t^2-2)+5} = \frac{32}{2t+\frac{1}{t}} \leq \frac{64}{9},$$

当 $t = 2$ 时取等号,

所以矩形面积的最大值为 $\frac{64}{9}$.