

宿迁市 2019~2020 学年度第二学期高三年级 5 月联考

数学参考答案

参考公式: 1. 方差公式: $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$;

2. 球的体积公式: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$, R 是球的半径.

一、填空题: 本大题共 14 小题, 每小题 5 分, 共计 70 分. 不需写出解题过程, 请把答案直接填写在答题卡相应位置上.

1. $\{1, 2\}$ 2. $2\sqrt{5}$ 3. 6 4. $\frac{14}{5}$ 5. $\frac{5}{6}$ 6. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ 7. -4
8. 2 9. $\frac{9}{4}$ 10. $\frac{1}{3}$ 11. $(1, \sqrt{2}]$ 12. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 13. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$
14. $[-\sqrt{3}+1, \sqrt{2}-1]$

二、解答题: 本大题共 6 小题, 15-17 题每题 14 分, 18-20 题每题 16 分, 共计 90 分. 请在答题卡指定区域内作答, 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. 证明: (1) 因为 $AD \parallel BC$, $BC = 2AD$, E 为 BC 的中点.,

所以 $AD \parallel BE$, 所以四边形 $ADEB$ 是平行四边形,

所以 $AB \parallel DE$ 3 分

又因为 $AB \not\subset$ 平面 DEF , $DE \subset$ 平面 DEF

所以 $AB \parallel$ 平面 DEF6 分

(2) 因为平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$

平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$

$AB \perp BC$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$

所以 $BC \perp$ 平面 PAB8 分

因为 $PB \subset$ 平面 PAB .

所以 $BC \perp PB$ 10 分

因为 E, F 分别为 BC, PC 的中点,

所以 $EF \parallel PB$, 所以 $BC \perp EF$

因为 $AB \parallel DE$, $BC \perp AB$

所以 $BC \perp DE$ 12 分

因为 $DE \subset$ 平面 DEF , $EF \subset$ 平面 DEF , $DE \cap EF = E$

所以 $BC \perp$ 平面 DEF14 分

16. 解：（1）在 $\triangle ADC$ 中，由余弦定理得

$$\cos \angle ADC = \frac{AD^2 + CD^2 - AC^2}{2AD \cdot CD} = \frac{2^2 + 2^2 - (\sqrt{6})^2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{1}{4} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } \sin \angle ADC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ADC} = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

因为 $\cos \angle BCD = \frac{\sqrt{6}}{4}$ ， $\angle BCD$ 是三角形 BCD 的内角，

$$\text{所以 } \sin \angle BCD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle BCD} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{4} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

所以 $\sin \angle B = \sin(\angle ADC - \angle BCD)$

$$= \sin \angle ADC \cos \angle BCD - \cos \angle ADC \sin \angle BCD$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{4} \times \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{8} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

（2）在 $\triangle BCD$ 中，由正弦定理得 $\frac{BD}{\sin \angle BCD} = \frac{CD}{\sin \angle B} = \frac{BC}{\sin \angle BDC} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$$BD = \frac{CD \sin \angle BCD}{\sin \angle B} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{10}}{4}}{\frac{\sqrt{10}}{8}} = 4$$

$$BC = \frac{CD \sin \angle BDC}{\sin \angle B} = \frac{2 \times \frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{\sqrt{10}}{8}} = 2\sqrt{6} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$\text{所以 } S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \angle B = \frac{1}{2} \times 6 \times 2\sqrt{6} \times \frac{\sqrt{10}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{2}. \quad \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$$

注：其它方法酌情给分！

17. 解：（1）由题意知 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$ ， $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$EF = 8 \sin \theta,$$

$$EH = 8 \cos \theta + 4\sqrt{2}, \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{则 } S(\theta) = EF \times EH = 8 \sin \theta (8 \cos \theta + 4\sqrt{2}),$$

$$\text{即 } S(\theta) = 32 \sin \theta (2 \cos \theta + \sqrt{2}), \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{4}]. \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$(2) \quad S'(\theta) = 32[\cos \theta (2 \cos \theta + \sqrt{2}) + \sin \theta (-2 \sin \theta)]$$

$$\begin{aligned}
 &= 32(2\cos^2 \theta - 2\sin^2 \theta + \sqrt{2} \cos \theta) \\
 &= 32(4\cos^2 \theta + \sqrt{2} \cos \theta - 2) \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}
 \end{aligned}$$

因为 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$, 所以 $2 \leq 4\cos^2 \theta < 4$, $1 \leq \sqrt{2} \cos \theta < 2$,

所以 $4\cos^2 \theta + \sqrt{2} \cos \theta - 2 > 0$,10 分

故当 $\theta \in (0, \frac{\pi}{4}]$ 时, $S'(\theta) > 0$ 恒成立,

所以 $S(\theta)$ 在 $(0, \frac{\pi}{4}]$ 上单调递增,12 分

故当 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时, $S(\theta)_{\max} = S(\frac{\pi}{4}) = 32 \sin \frac{\pi}{4} (2 \cos \frac{\pi}{4} + \sqrt{2}) = 64$.

答: 当 θ 为 $\frac{\pi}{4}$ 时, 矩形 $EFGH$ 的面积最大, 最大值为 64.14 分

18. 解: (1) 由题设可知 $a=2, e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, 所以 $c=\sqrt{3}$, 故 $b=1$, 因此 $a=2, b=1$.

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$3 分

(2) 设 $P(m, 0) (-2 \leq m \leq 2), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

①若 $k=1$, 则直线 l 的方程为 $y=x-m$.

联立直线 l 与椭圆 C 的方程, 即 $\begin{cases} y=x-m \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$,

消去 y , 化简得 $\frac{5}{4}x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$,5 分

所以 $x_1 + x_2 = \frac{8m}{5}, x_1 x_2 = \frac{4(m^2 - 1)}{5}$.

又 $|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \frac{4}{5} \sqrt{2(5-m^2)}$,7 分

点 O 到直线 l 的距离 $d = \frac{|m|}{\sqrt{2}}$,

所以 $S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \times |AB| \times d = \frac{2}{5} |m| \sqrt{5-m^2} \leq \frac{2}{5} \times \frac{m^2 + (5-m^2)}{2} = 1$.

当且仅当 $m^2 = \frac{5}{2}$, 即 $m = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}$ 时, $S_{\triangle OAB}$ 取得最大值 1.9 分

②设直线 l 的方程为 $y=k(x-m)$.

将直线与椭圆的方程联立，即
$$\begin{cases} y = k(x - m) \\ \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \end{cases}$$

消去 y ，化简得 $(1 + 4k^2)x^2 - 8mk^2x + 4(k^2m^2 - 1) = 0$,11 分

所以 $x_1 + x_2 = \frac{8mk^2}{1 + 4k^2}$, $x_1x_2 = \frac{4(k^2m^2 - 1)}{1 + 4k^2}$.

所以 $|PA|^2 + |PB|^2 = (x_1 - m)^2 + y_1^2 + (x_2 - m)^2 + y_2^2 = \frac{3}{4}(x_1^2 + x_2^2) - 2m(x_1 + x_2) + 2m^2 + 2$

$$= \frac{m^2(-8k^4 - 6k^2 + 2) + (1 + 4k^2)(8 + 8k^2)}{(1 + 4k^2)^2},$$
14 分

因为 $|PA|^2 + |PB|^2$ 的值与点 P 的位置无关，即上式取值与 m 无关，

故有 $-8k^4 - 6k^2 + 2 = 0$ ，解得 $k = \pm \frac{1}{2}$16 分

19. 解：(1) 当 $a = 0$ 时， $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ，则 $f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ ，

在 $x = 1$ 处的切点为 $(1, 0)$ ，切线斜率为 $f'(1) = 1$ ，

所以函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的切线方程为 $y = x - 1$3 分

(2) 因为 $f(x) = \frac{\ln x}{x} + \frac{x}{2} - \frac{2a + 1}{2x} + a (a \in R)$.

所以 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$ ； $f'(x) = \frac{x^2 - 2\ln x + 2a + 3}{x^2}$ ，

又因为函数 $f(x)$ 在定义域上为单递增函数，

所以 $f'(x) = \frac{x^2 - 2\ln x + 2a + 3}{x^2} \geq 0$ 在 $x > 0$ 时恒成立，

即 $x^2 - 2\ln x + 2a + 3 \geq 0$ 在 $x > 0$ 时恒成立，6 分

设 $g(x) = x^2 - 2\ln x + 2a + 3 (x > 0)$ ，

则 $g'(x) = \frac{2x^2 - 2}{x}$ ，

当 $0 < x < 1$ 时， $g'(x) < 0$ ，则 $g(x)$ 在 $(0, 1]$ 上为减函数，

当 $x > 1$ 时， $g'(x) > 0$ ，则 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上为增函数，8 分

$x^2 - 2\ln x + 2a + 3 \geq 0$ 在 $x > 0$ 时恒成立 $\Leftrightarrow g(x)_{\min} = g(1) = 4 + 2a \geq 0$ ，

所以 $a \geq -2$9 分

(3) 因为 $f'(x) = \frac{x^2 - 2\ln x + 2a + 3}{x^2}$ ，

所以 $f'(e^a) = \frac{e^{2a} + 3}{2e^{2a}} > 0$, 则 $f'(x) < 0$ 不可能对 $x > 0$ 恒成立,

即 $f(x)$ 在定义域上不可能始终都为减函数,10 分

由 (2) 知函数 $f(x)$ 为增函数 $\Leftrightarrow a \geq -2$,

所以若函数 $f(x)$ 在定义域上不是单调函数 $\Leftrightarrow a < -2$

又因为 $f(1) = 0$, 所以 $x = 1$ 是函数 $f(x) = 0$ 一个零点,

令 $f(x) = 0$, 得 $2\ln x + x^2 + 2ax - 2a - 1 = 0$

设 $h(x) = 2\ln x + x^2 + 2ax - 2a - 1$, 则 $f(x)$ 与 $h(x)$ 有相同的零点,

令 $h'(x) = \frac{2(x^2 + ax + 1)}{x} = 0$, 得 $x^2 + ax + 1 = 0$,

因为 $a < -2$, 所以 $\Delta = a^2 - 4 > 0$,

所以 $x^2 + ax + 1 = 0$ 有两个不相等实数解 x_1, x_2 ,

因为 $x_1 \cdot x_2 = 1, x_1 + x_2 = -a > 2$, 所以不妨设 $0 < x_1 < 1 < x_2$,12 分

当 $x \in (0, x_1)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(0, x_1)$ 为增函数

当 $x \in (x_1, x_2)$ 时, $h'(x) < 0$, $h(x)$ 在 $(0, x_1)$ 为减函数

当 $x \in (x_1, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 在 $(0, x_1)$ 为增函数

则 $h(x_1) > h(1) > 0, h(x_2) < h(1) < 0$ 14 分

又因为 $a < -2$ 时, $0 < e^a < 1, -2a > 4$

$h(e^a) = e^{2a} - 1 + 2ae^{2a} < 0, h(-2a) = 2\ln(-2a) + 4a^2 - 6a - 1 > 0$,

又因为 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 图象不间断, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 有唯一一个零点

又因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 图象不间断, 所以 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 有唯一一个零点

又因为 $x = 1$ 是函数 $f(x) = 0$ 一个零点,

综上函数 $f(x)$ 必有三个不同零点.16 分

20. 解: (1) 因为 $a_n = \frac{1}{2^n}$, 所以 $S_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - (\frac{1}{2})^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - (\frac{1}{2})^n$,2 分

所以 $a_{n+1} - S_n = (\frac{1}{2})^{n+1} - 1 + (\frac{1}{2})^n = \frac{3}{2}(\frac{1}{2})^n - 1 \leq \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{4} < 0$,

所以 $a_{n+1} < S_n$, 即 $\{a_n\} \in M$4 分

(2) 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $\{a_n + n\} \in M$,

所以 $a_{n+1} + n + 1 \leq (a_1 + 1) + (a_2 + 2) + \dots + (a_n + n)$ (*)

特别的当 $n = 1$ 时, $a_2 + 2 \leq a_1 + 1$, 即 $d \leq -1$,

由 (*) 得 $a_1 + nd + n + 1 \leq na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d + \frac{n(n+1)}{2}$,6 分

整理得 $\frac{d+1}{2}n^2 + (a_1 - \frac{3}{2}d - \frac{1}{2})n - a_1 - 1 \geq 0$,

因为上述不等式对一切 $n \in \mathbf{N}^*$ 恒成立, 所以必有 $\frac{d+1}{2} \geq 0$, 解得 $d \geq -1$,

又 $d \leq -1$, 所以 $d = -1$,8 分

于是 $(a_1 + 1)n - a_1 - 1 \geq 0$, 即 $(a_1 + 1)(n - 1) \geq 0$, 所以 $a_1 + 1 \geq 0$,

即 $a_1 \geq -1$,10 分

(3) 由 $a_{n+1} \leq S_n$ 得 $S_{n+1} - S_n \leq S_n$, 所以 $S_{n+1} \leq 2S_n$, 即 $\frac{S_{n+1}}{S_n} \leq 2$,

所以 $\frac{S_{n+1}}{S_1} = \frac{S_2}{S_1} \times \frac{S_3}{S_2} \times \dots \times \frac{S_{n+1}}{S_n} \leq 2^n$, 从而有 $S_{n+1} \leq S_1 \times 2^n = a_1 \times 2^n$,

又 $a_{n+1} \leq S_n$, 所以 $a_{n+2} \leq S_{n+1} \leq a_1 \times 2^n$, 即 $a_n \leq a_1 \times 2^{n-2} (n \geq 3)$,

又 $a_2 \leq S_1 = a_1 \times 2^{2-2}$, $a_1 < a_1 \times 2^{1-2}$, 所以有 $a_n \leq a_1 \times 2^{n-2} (n \in \mathbf{N}^*)$,

所以 $\frac{4^n}{a_n} \geq \frac{4}{a_1} \times 2^n$,12 分

假设数列 $\{\frac{4^n}{a_n}\}$ 中存在无穷多项依次成等差数列,

不妨设该等差数列的第 n 项为 $dn + b$ (b 为常数),

则存在 $m \in \mathbf{N}$, $m \geq n$, 使得 $dn + b = \frac{4^m}{a_m} \geq \frac{4}{a_1} \times 2^m \geq \frac{4}{a_1} \times 2^n$, 即 $da_1n + ba_1 \geq 2^{n+2}$,

设 $f(n) = \frac{n^2}{2^{n+2}}$, $n \in \mathbf{N}^*$, $n \geq 3$, 则 $f(n+1) - f(n) = \frac{(n+1)^2}{2^{n+3}} - \frac{n^2}{2^{n+2}} = \frac{2 - (n-1)^2}{2^{n+3}} < 0$,

即 $f(n+1) < f(n) \leq f(3) = \frac{9}{32} < 1$,14 分

于是当 $n \geq 3$ 时, $2^{n+2} > n^2$, 从而有: 当 $n \geq 3$ 时 $da_1n + ba_1 > n^2$, 即 $n^2 - da_1n - ba_1 < 0$,

于是当 $n \geq 3$ 时, 关于 n 的不等式 $n^2 - da_1n - ba_1 < 0$ 有无穷多个解, 显然不成立,

因此数列 $\{\frac{4^n}{a_n}\}$ 中是不存在无穷多项依次成等差数列.16 分

附加题

21. 【选做题】本题包括 A、B、C 三小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答，若多做，则按作答的前两小题评分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

A. 解：(1) 由条件 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ ，得 $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$4 分

(2) 设变换后新曲线上任一点 $P(x, y)$ ，变换前对应点 $P'(x', y')$ ，则

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \text{ 即 } \begin{cases} x = \frac{1}{3}x' \\ y = \frac{1}{4}y' \end{cases} \quad \text{.....6 分}$$

$$\begin{cases} x' = 3x \\ y' = 4y \end{cases}, \text{ 代入 } x^2 + y^2 = 144 \text{ 得: } \frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{9} = 1$$

所以曲线 $x^2 + y^2 = 144$ 在 A^{-1} 的作用下的新曲线的方程为 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$10 分

B. [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

解：由 $\begin{cases} x = -1 + 2\cos\theta \\ y = 3 + 2\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数) 消去参数得圆的普通方程为 $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 4$ ，圆心坐标为

$(-1, 3)$,5 分

过圆心且与极轴垂直的直线的直角坐标方程为 $x = -1$,

化为极坐标方程为 $\rho \cos\theta = -1$ 10 分

【必做题】第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分。请在答题卡指定区域内作答。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

22. 解：如图，以点 D 为原点 O ， DA, DC, DD_1 分别为 x, y, z 轴建立

空间直角坐标系 $O-xyz$ ，则 $D(0,0,0), B(1,1,0), A_1(1,0,3), P(0,1,1)$ 1 分

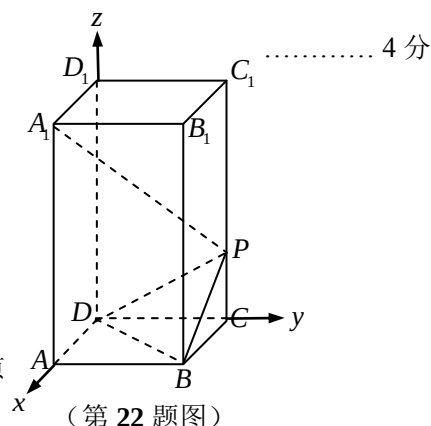
(1) 所以 $\overrightarrow{A_1P} = (-1, 1, -2), \overrightarrow{DB} = (1, 1, 0), \overrightarrow{DP} = (0, 1, 1)$,

设平面 PDB 一个法向量为 $\vec{n}_1 = (x, y, z)$

$$\text{由 } \begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases} \text{ 得 } \begin{cases} y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}, \text{ 取 } \vec{n}_1 = (1, -1, 1)$$

设直线 A_1P 与平面 PDB 所成角为 θ ,

$$\text{所以 } \sin\theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{A_1P}, \vec{n}_1 \rangle \right| = \left| \frac{-1-1-2}{\sqrt{6}\sqrt{3}} \right| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$



所以直线 A_1P 与平面 PDB 所成角的正弦值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 6 分

(2) 由 (1) 知平面 PDB 一个法向量为 $\vec{n}_1 = (1, -1, 1)$

取平面 ABD 一个法向量 $\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$ 7 分

$$\cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{..... 9 分}$$

由图知二面角 $A-BD-P$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 10 分

23. 解: 由题设 $F(\frac{1}{2}, 0)$. 设 $l_1: y = a, l_2: y = b$, 则 $ab \neq 0$, 且

$$A(\frac{a^2}{2}, a), B(\frac{b^2}{2}, b), P(-\frac{1}{2}, a), Q(-\frac{1}{2}, b), R(-\frac{1}{2}, \frac{a+b}{2}).$$

记过 A, B 两点的直线为 l , 则 l 的方程为 $2x - (a+b)y + ab = 0$.

(1) 由于 F 在线段 AB 上, 故 $1 + ab = 0$.

记 AR 的斜率为 k_1 , FQ 的斜率为 k_2 , 则

$$k_1 = \frac{a-b}{1+a^2} = \frac{a-b}{a^2-ab} = \frac{1}{a} = \frac{-ab}{a} = -b = k_2.$$

所以 $AR \parallel FQ$ 4 分

(2) 设 l 与 x 轴的交点为 $D(x_1, 0)$,

$$\text{则 } S_{\triangle ABF} = \frac{1}{2} |b-a| |FD| = \frac{1}{2} |b-a| \left| x_1 - \frac{1}{2} \right|, S_{\triangle PQF} = \frac{|a-b|}{2}.$$

由题设可得 $\frac{1}{2} |b-a| \left| x_1 - \frac{1}{2} \right| = \frac{|a-b|}{2}$, 所以 $x_1 = 0$ (舍去), $x_1 = 1$ 6 分

设满足条件的 AB 的中点为 $E(x, y)$.

当 AB 与 x 轴不垂直时, 由 $k_{AB} = k_{DE}$ 可得 $\frac{2}{a+b} = \frac{y}{x-1} (x \neq 1)$, 而 $\frac{a+b}{2} = y$,

所以 $y^2 = x - 1 (x \neq 1)$ 9 分

当 AB 与 x 轴垂直时, E 与 D 重合.

所以, 所求轨迹方程为 $y^2 = x - 1$ 10 分