

热点追踪

数列中的存在性问题一般转化为求不定方程正整数解的问题，往往涉及数论、函数、方程、不等式等知识，蕴含了丰富的数学思想. 本专题对数列中一些存在性问题进行探究，使学生学会通过研究方程两边范围的策略来解不定方程整数解的问题.

1 例题导引

因微而准 因微而细

例题：已知 $a_n = 2^n$ ，是否存在正整数 $p, q, r (p < q < r)$ ，使得 a_p, a_q, a_r 成等差数列？并说明理由.

2 变式联想

联想问题 重构网络

变式 1 已知 $a_n = 2^n$ ，是否存在三个互不相等正整数 p, q, r ，且 p, q, r 成等差数列，使得 $a_p - 1, a_q - 1, a_r - 1$ 成等比数列？并说明理由.

变式 2 已知 $a_n = n + \sqrt{2}$ ，是否存在正整数 $p, q, r (p < q < r)$ ，使得 a_p, a_q, a_r 成等比数列？并说明理由.

串讲 1 已知数列是各项均不为 0 的等差数列, S_n 为其前 n 项和, 且满足 $a_n^2 = S_{2n-1}$,

令 $b_n = \frac{1}{a_n \cdot a_{n+1}}$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 $\{b_n\}$ 为 T_n .

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式及数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n ;

(2) 是否存在正整数 $m, n (1 < m < n)$, 使得 T_1, T_m, T_n 成等比数列? 若存在, 求出所有的 m, n 的值, 若不存在, 请说明理由.

串讲 2 已知数列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n , 且对任意 $n \in \mathbf{N}^*$, $a_{n+1} - a_n = 2(b_{n+1} - b_n)$ 恒成立.

(1) 若 $A_n = n^2$, $b_1 = 2$, 求 B_n ;

(2) 若 $a_1 = 2$, $b_n = 2^n$, 是否存在两个互不相等的整数 $s, t (1 < s < t)$, 使 $\frac{A_1}{B_1}, \frac{A_s}{B_s}, \frac{A_t}{B_t}$ 成等差数列? 若存在, 求出 s, t 的值; 若不存在, 请说明理由.

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $\left(1-\frac{1}{a_1}\right)\left(1-\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{a_n}\right)=\frac{1}{a_n}$, $n\in\mathbf{N}^*$, S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2)若 a_p 、30、 S_q 成等差数列, a_p 、18、 S_q 成等比数列, 求正整数 p , q 的值;

(3)是否存在 $k\in\mathbf{N}^*$ 使得 $\sqrt{a_k a_{k+1}+16}$ 为数列 $\{a_n\}$ 中的项? 若存在, 求出所有满足条件的 k 的值; 若不存在, 请说明理由.

5 规范答题

已知各项都是正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $2S_n=a_n^2+a_n$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=\frac{1}{2}$,

$$2b_{n+1}=b_n+\frac{b_n}{a_n}.$$

(1)求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2)设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n=\frac{b_{n+2}}{S_n}$, 求和 $c_1+c_2+\cdots+c_n$;

(3)是否存在正整数 p , q , $r(p<q<r)$, 使得 b_p , b_q , b_r 成等差数列? 若存在, 求出所有满足要求的 p , q , r , 若不存在, 请说明理由.