参 考 答 案

第1章 导数及其应用

1.1 导数的概念

1.1.1 平均变化率

1. C 解析：因平均变化率为$\frac{\Delta y}{\Delta x}$，故$\Delta x\neq 0$.

2. B 解析：$\bar{v}=\frac{(3+2.1^2)-(3+2^2)}{0.1}=4.1$.

3. C 解析：$\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=2(1+\Delta x)^2-1-1=2(\Delta x)^2+4\Delta x$，所以$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2\Delta x+4$.

4. B 解析：设$y=f(x)=x^2-2x+1=(x-1)^2$，$\Delta y=f(-2+\Delta x)-f(-2)=(-2+\Delta x-1)^2-(-2-1)^2=(-3+\Delta x)^2-9=(\Delta x)^2-6\Delta x$，所以$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\Delta x-6$，所以函数$y=x^2-2x+1$在$x=-2$附近的平均变化率为$\Delta x-6$.

5. A 解析：因为$\bar{v}=\frac{(3+\Delta t)^2+3-(3^2+3)}{\Delta t}=\frac{6\Delta t+(\Delta t)^2}{\Delta t}=6+\Delta t$. 故选A.

6. B 解析：由图可知$f(3)=1$，$f(1)=3$，所以$f(3)-f(1)=-2$，所以函数$y=f(x)$在A，B两点间的平均变化率是$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=-1$. 故选B.

7. ACD 解析：在t_0处，虽然$W_1(t_0)=W_2(t_0)$，但是，在$t_0-\Delta t$处，$W_1(t_0-\Delta t)<W_2(t_0-\Delta t)$，即$\left|\frac{W_1(t_0)-W_1(t_0-\Delta t)}{\Delta t}\right|<\left|\frac{W_2(t_0)-W_2(t_0-\Delta t)}{\Delta t}\right|$，所以，在相同时间$\Delta t$内，甲厂比乙厂的平均治污率小. 所以乙厂治污效果较好. 故选ACD.

8. 2 解析：依题意得平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(1)}{b-1}=\frac{b^2-3-(1-3)}{b-1}=3$，解得$b=2$($b=1$舍去).

9. $\frac{1\,312}{25(4-n)}$($n\in\mathbf{N}^*$且$1\leqslant n\leqslant 4$) 解析：$P_n=\frac{C(80+5n)-C(80)}{(80+5n)-80}=\frac{1\,312}{25(4-n)}$($n\in\mathbf{N}^*$且$1\leqslant n\leqslant 4$).

10. 2.1 解析：因为$\Delta y=(1+\Delta x)^2+1-(1^2+1)=2\Delta x+(\Delta x)^2$，所以$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2+\Delta x$，所以割线斜率为$2+\Delta x$，当$\Delta x=0.1$时，割线$PQ$的斜率$k=2+0.1=2.1$.

11. 解：$f(x)$在$[-3,-1]$上的平均变化率为$\frac{f(-1)-f(-3)}{-1-(-3)}=\frac{0-[(-3)^3-(-3)]}{2}=12$.

$f(x)$在$\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$上的平均变化率为

$$\frac{f\left(\frac{1}{2}\right)-f\left(-\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^3+\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{3}{4}.$$

$f(x)$在$\left[\frac{2}{3},3\right]$上的平均变化率为

$$\frac{f(3)-f\left(\frac{2}{3}\right)}{3-\frac{2}{3}}=\frac{3^3-3-\left(\frac{2}{3}\right)^3+\left(\frac{2}{3}\right)}{\frac{7}{3}}=\frac{658}{63}.$$

12. 解：设$\Delta x>0$，则由

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=3x^2+3x\Delta x+(\Delta x)^2=3\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)^2+\frac{(\Delta x)^2}{4}>0$，

得在任意闭区间$[x,x+\Delta x]$上，都有$f(x+\Delta x)-f(x)>0$. 故当x增大时，$f(x)$也增大.

1.1.2 瞬时变化率——导数

第1课时 曲线上一点处的切线

1. D 解析：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(3+\Delta x)^2-3^2}{\Delta x}=6+\Delta x$，令$\Delta x\to 0$，得$f'(3)=6$.

2. A 解析：$\Delta y=f(2+\Delta x)-f(2)=2(2+\Delta x)+5-(2\times 2+5)=2\Delta x$，所以$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2$，所以$f'(2)=2$.

3. B 解析：$\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=2\cdot\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}$.

当$\Delta x\to 0$时，$\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}\to f'(1)$，所以

$2\cdot\frac{f(1+2\Delta x)-f(1)}{2\Delta x}\to 2f'(1)=2\times(-2)=-4$.

4. A 解析：由图象易知，点 A,B 处的切线斜率 k_A，k_B 满足 $k_A<k_B<0$，由导数的几何意义得 $f'(x_A)<f'(x_B)$.

5. B 解析：因为 $\Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)=(1+\Delta x)-\frac{1}{1+\Delta x}-\left(1-\frac{1}{1}\right)=\Delta x+1-\frac{1}{1+\Delta x}=\Delta x+\frac{\Delta x}{1+\Delta x}$，所以 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta x+\frac{\Delta x}{1+\Delta x}}{\Delta x}=1+\frac{1}{1+\Delta x}$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$1+\frac{1}{1+\Delta x}\to 2$，所以函数在 $x=1$ 处的导数等于2.

6. B 解析：因为 $f(0)=1$，所以 $b=1$. 又 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\Delta x+a$. 所以当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to a$，则 $f'(0)=a=1$. 所以 $a+b=1+1=2$.

7. ACD 解析：导数是一个局部概念，它只与函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处及其附近的函数值有关，与 h 无关.

8. $(1,0)$ 解析：设切点 P 为 (x_0,y_0)，则由 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^4-(x_0+\Delta x)-x_0^4+x_0}{\Delta x}=4x_0^3-1+(6x_0^2+4x_0\Delta x+(\Delta x)^2)\Delta x\to 4x_0^3-1(\Delta x\to 0)$，于是由 $4x_0^3-1=3$，得 $x_0=1$，又 $f(x_0)=f(1)=0$，所以 $P(1,0)$.

9. $(-2,15)$ 解析：设切点 $P(x_0,y_0)$，则由 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-10(x_0+\Delta x)+3-x_0^3+10x_0-3}{\Delta x}=3x_0^2-10+(3x_0+\Delta x)\Delta x\to 3x_0^2-10(\Delta x\to 0)$，得 $3x_0^2-10=2$，所以 $x_0=\pm 2$. 又 P 点在第二象限，所以 $x_0=-2$，则 $y_0=(-2)^3-10\times(-2)+3=15$，故点 P 的坐标为 $(-2,15)$.

10. -2 解析：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{x+\Delta x+1}{x+\Delta x-1}-\frac{x+1}{x-1}}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x+1)(x-1)-(x+\Delta x-1)(x+1)}{(x+\Delta x-1)(x-1)\Delta x}=\frac{-2}{(x+\Delta x-1)(x-1)}$. 当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to\frac{-2}{(x-1)^2}$，所以曲线在点 $(3,2)$ 处的切线斜率为 $k=\frac{-2}{(3-1)^2}=-\frac{1}{2}$，又切线与 $ax+y+1=0$ 垂直，所以 $a=-2$.

11. 解：设切点 $P(x_0,y_0)$，则由 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-3(x_0+\Delta x)^2-x_0^3+3x_0^2}{\Delta x}=3x_0^2-6x_0+(3x_0-3+\Delta x)\Delta x\to 3x_0^2-6x_0(\Delta x\to 0)$，所以有 $3x_0^2-6x_0=-3$，解得 $x_0=1$，所以 $y_0=1^3-3\times 1^2=-2$，即切点为 $(1,-2)$，代入 $y=-3x+b$，得 $b=1$.

12. 解：因为 $y=f(x)=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$，由题意知切点为 $P(1,0)$，设与 P 邻近点为 $Q(1+\Delta x,f(1+\Delta x))$，则 $k_{PQ}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{1+\Delta x-1}=\frac{\frac{1}{1+\Delta x}-\sqrt{1+\Delta x}}{\Delta x}=\frac{1-(\sqrt{1+\Delta x})^3}{(1+\Delta x)\Delta x}=\frac{(1-\sqrt{1+\Delta x})(1+\sqrt{1+\Delta x}+1+\Delta x)}{(1+\Delta x)\Delta x}=-\frac{1}{(1+\sqrt{1+\Delta x})(1+\Delta x)}-\frac{\sqrt{1+\Delta x}}{1+\Delta x}$.

当 $\Delta x\to 0$ 时，$k_{PQ}\to -\frac{3}{2}$，所以曲线 $y=\frac{1}{x}-\sqrt{x}$ 在 $x=1$ 处的切线斜率 $k=-\frac{3}{2}$，切线方程为 $y=-\frac{3}{2}(x-1)$，即 $3x+2y-3=0$.

第2课时 瞬时速度与瞬时加速度

1. A 解析：$\Delta s=-\frac{1}{2}(2+\Delta t)^2+8(2+\Delta t)-\left(8\times 2-\frac{1}{2}\times 2^2\right)=6\Delta t-\frac{1}{2}(\Delta t)^2$，则 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=6-\frac{1}{2}\Delta t$，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}\to 6$.

2. C 解析：$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{3(3+\Delta t)^2-3\times 3^2}{\Delta t}=18+3\Delta t$，当 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}=18+3\times 0=18$. 所以质点 A 在 $t=3$ 时的瞬时速度为18.

3. A 解析：因为 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{1-(3+\Delta t)+(3+\Delta t)^2-(1-3+3^2)}{\Delta t}=5+\Delta t$，所以 $\Delta t\to 0$，$\frac{\Delta s}{\Delta t}=(5+\Delta t)\to 5(\mathrm{m/s})$.

4. C 解析：因为当 $t=1$ 时，$\Delta s=2(1+\Delta t)^3-2\times 1^3=2[1+(\Delta t)^3+3\Delta t+3(\Delta t)^2]-2=2+2(\Delta t)^3+6\Delta t+6(\Delta t)^2-2=2(\Delta t)^3+6(\Delta t)^2+6\Delta t$，所以 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{2(\Delta t)^3+6(\Delta t)^2+6\Delta t}{\Delta t}=2(\Delta t)^2+6\Delta t+6$，所以当 $\Delta t\to 0$ 时，$\frac{\Delta s}{\Delta t}\to 6$，则物体在 $t=1$ 时的瞬时速度是6.

5. B 解析：因为 $\Delta s=s(2+\Delta t)-s(2)=a(2+\Delta t)^2+1-a\cdot 2^2-1=4a\Delta t+a(\Delta t)^2$，所以 $\frac{\Delta s}{\Delta t}=4a+a\Delta t$，故当 $t=2$ 时，瞬时速度为 $\Delta t\to 0$ 时 $\frac{\Delta s}{\Delta t}\to 4a$，所以 $4a=8$，所以 $a=2$.

6. B 解析:由瞬时速度的定义知,当 $\Delta t\to 0$ 时,$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 为在 t 时刻物体的瞬时速度.

7. ACD 解析:因为 $\Delta s=v_0(t_0+\Delta t)-\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-v_0t_0+\frac{1}{2}gt_0^2=(v_0-gt_0)\Delta t-\frac{1}{2}g(\Delta t)^2$,所以$\frac{\Delta s}{\Delta t}=v_0-gt_0-\frac{1}{2}g\Delta t$. 当 $\Delta t\to 0$ 时,$\frac{\Delta s}{\Delta t}\to v_0-gt_0$,所以物体在 t_0 时刻的瞬时速度为 v_0-gt_0. 由此,类似地可得到物体运动的速度函数为 $v(t)=v_0-gt$,所以 $\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_0-g(t_0+\Delta t)-(v_0-gt_0)}{\Delta t}=-g$. 所以当 $\Delta t\to 0$ 时,$\frac{\Delta v}{\Delta t}\to -g$. 故物体在 t_0 时刻的瞬时加速度为 $-g$. 故选 ACD.

8. $2\pi ar_0^2(1+at)$ 解析:设铝盘的面积为 $S(t)$,则由题意,得 $S(t)=\pi r^2=\pi r_0^2(1+at)^2$.

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{S(t+\Delta t)-S(t)}{\Delta t}$$

$$=\frac{\pi r_0^2\left[1+a(t+\Delta t)\right]^2-\pi r_0^2(1+at)^2}{\Delta t}$$

$$=\pi r_0^2\left[2a+2a^2t+a^2(\Delta t)\right].$$

当 Δt 无限趋近于 0 时,$\frac{\Delta S}{\Delta t}$无限趋近于 $2\pi ar_0^2(1+at)$.

9. $24-1.6t$ -1.6

解析:$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{24(t+\Delta t)-0.8(t+\Delta t)^2-24t+0.8t^2}{\Delta t}=\frac{24\Delta t-1.6t\cdot\Delta t-0.8(\Delta t)^2}{\Delta t}=24-1.6t-0.8\Delta t$.

当 Δt 无限趋近于 0 时,$\frac{\Delta h}{\Delta t}$无限趋近于 $24-1.6t$.

故岩石在 t s时的速度为 $v=24-1.6t$.

$\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{24-1.6(t+\Delta t)-24+1.6t}{\Delta t}=\frac{-1.6\Delta t}{\Delta t}=-1.6$.

当 Δt 无限趋近于 0 时,$\frac{\Delta v}{\Delta t}$无限趋近于$-1.6$.

故岩石在 t s时的加速度为-1.6.

10. 50.4 解析:$\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}=$

$\frac{0.2(t+\Delta t)^3+8(t+\Delta t)^2+16(t+\Delta t)-0.2t^3-8t^2-16t}{\Delta t}$

$=0.2[3t^2+3t(\Delta t)+(\Delta t)^2]+16t+8\Delta t+16$.

当 $\Delta t\to 0$ 时,t s 末的瞬时速度 $v(t)=0.6t^2+16t+16$.

所以第 2s 末的瞬时速度为 $v(t)=0.6\times 2^2+16\times 2+16=50.4$.

11. 解:(1)$\frac{s(\Delta t)-s(0)}{\Delta t}=\frac{3\Delta t-(\Delta t)^2}{\Delta t}=3-\Delta t$.

当 $\Delta t\to 0$ 时,$\frac{s(\Delta t)-s(0)}{\Delta t}\to 3$,所以 $v_0=3$.

(2)$\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}=$

$\frac{3(2+\Delta t)-(2+\Delta t)^2-(3\times 2-2^2)}{\Delta t}=-\Delta t-1$.

当 $\Delta t\to 0$ 时,$\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}\to -1$,所以 $t=2$ 时的瞬时速度为-1.

(3)$\bar{v}=\frac{s(2)-s(0)}{2-0}=\frac{6-4-0}{2}=1$.

12. 解:(1)$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{h(1)-h(0)}{1-0}=80$(m/s),所以,第 1 s 内的平均速度为 80 m/s.

(2)$\frac{\Delta h}{\Delta t}=\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}=\frac{1}{\Delta t}[5(t+\Delta t)^3+30(t+\Delta t)^2+45(t+\Delta t)+4-5t^3-30t^2-45t-4]=15t^2+60t+45+(15t+30)\Delta t+5(\Delta t)^2$,当 $\Delta t\to 0$ 时,第 t s 末的瞬时速度为 $v=15t^2+60t+45$(m/s).

(3)设经过 t s 飞船的速度达到 75 m/s,则由(2)得 $15t^2+60t+45=75$,即 $t^2+4t-2=0$. 又 $t>0$,解得 $t=\sqrt{6}-2$.

所以经过($\sqrt{6}-2$)s 飞船的速度达到 75 m/s.

第 3 课时 导 数

1. A 解析:由导数的几何意义,$f'(4)=-2$. 又 $f(4)=-2\times 4+9=1$. 故 $f(4)+f'(4)=1-2=-1$.

2. A 解析:依题意,$y=f'(x)$在$[a,b]$上是增函数,则在函数 $f(x)$的图象上,各点的切线的斜率随着 x 的增大而增大,观察四个选项的图象,只有 A 满足.

3. D 解析:$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\frac{1}{4}(2+\Delta x)^2-\frac{1}{4}\times 2^2}{\Delta x}=1+\frac{1}{4}\Delta x$. 当 $\Delta x\to 0$ 时,$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 1$,即 $f'(2)=1$,由导数的几何意义知,点 Q 处切线斜率 $k=f'(2)=1$. 所以切线方程为 $y-1=x-2$. 即 $x-y-1=0$.

4. D 解析:因为 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{2(1+\Delta x)^2-2\times 1^2}{\Delta x}=4+2\Delta x$,当 $\Delta x\to 0$ 时,$4+2\Delta x\to 4$,所以 $f'(1)=4$. 所以切线方程为 $y-2=4(x-1)$,即 $4x-y-2=0$.

5. D 解析:设点 P 的坐标为(x_0,y_0),则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$

$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{2(x_0+\Delta x)^2+4(x_0+\Delta x)-2x_0^2-4x_0}{\Delta x}$

$=4(x_0+1)+2\Delta x$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$

$\to 4(x_0+1)$，即 $f'(x_0)=4(x_0+1)$，由导数的几何意义知 $f'(x_0)=16$，所以 $x_0=3$，$y_0=30$，所以点 P 的坐标为 $(3,30)$.

6. B　**解析**：由 $y=f(x)$ 的图象及导数的几何意义可知，当 $x<0$ 时 $f'(x)>0$，当 $x=0$ 时 $f'(x)=0$，当 $x>0$ 时 $f'(x)<0$，故 B 选项符合.

7. ABC　**解析**：$y=\sin x, x\in\mathbf{R}$ 在点 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 处的切线与 $y=\sin x$ 有无数个公共点. 故 D 正确，所以 ABC 不正确.

8. $-f'(x_0)$　**解析**：由导数定义可得.

9. $(1,0)$　**解析**：设 $P(x_0,y_0)$ 是曲线 $y=x^3-2x^2+1$ 上一点，则由 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$

$\frac{(x_0+\Delta x)^3-2(x_0+\Delta x)^2+1-(x_0^3-2x_0^2+1)}{\Delta x}$

$=3x_0^2-4x_0+(3x_0-2)\Delta x+(\Delta x)^2$.

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 3x_0^2-4x_0$，

即 $y'\Big|_{x=x_0}=3x_0^2-4x_0$.

由导数的几何意义，得 $3x_0^2-4x_0=-1$，解得 $x_0=1$ 或 $x_0=\frac{1}{3}$. 这时点 $P_1(1,0)$ 和 $P_2\left(\frac{1}{3},\frac{22}{27}\right)$ 中仅点 P_1 在直线 $y=-x+1$ 上.

10. $\pm\sqrt{2}$　**解析**：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{(x+\Delta x)^2+2(x+\Delta x)-(x^2+2x)}{\Delta x}$

$=2x+2+\Delta x$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{\Delta y}{\Delta x}\to 2x+2$，从而 $f'(x)=2x+2$. 于是 $f(x_0)=f'(x_0)$，得 $x_0^2+2x_0=2x_0+2$，$x_0^2=2$，$x_0=\pm\sqrt{2}$.

11. **解**：设切点为 $Q(a,a^2+1)$，$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=\frac{(a+\Delta x)^2+1-(a^2+1)}{\Delta x}=2a+\Delta x$，当 $\Delta x\to 0$ 时，$2a+\Delta x\to 2a$，所以所求切线的斜率为 $2a$. 因此，$\frac{(a^2+1)-0}{a-1}=2a$，解得 $a=1\pm\sqrt{2}$，所以所求的切线方程为 $y=(2+2\sqrt{2})x-(2+2\sqrt{2})$ 或 $y=(2-2\sqrt{2})x-(2-2\sqrt{2})$.

12. **解**：因为点 $(1,-1)$ 在切线 $y=k(x+2)$ 上，所以 $k=-\frac{1}{3}$.

$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}=\frac{a(1+\Delta x)^3-b(1+\Delta x)-a+b}{\Delta x}$

$=a(\Delta x)^2+3a\Delta x+3a-b$，

当 $\Delta x\to 0$ 时，$\frac{f(1+\Delta x)-f(1)}{\Delta x}\to 3a-b$，

即 $f'(1)=3a-b$，所以 $3a-b=-\frac{1}{3}$，　①

又由 $f(1)=-1$，得 $a-b=-1$，　②

由①②得，$a=\frac{1}{3}$，$b=\frac{4}{3}$.

1.2　导数的运算

1.2.1　常见函数的导数

1. A　**解析**：因为 $f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$，所以 $f'(3)=\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. C　**解析**：设切点为 (x_0,x_0^2)，则斜率 $k=2x_0=2$，所以 $x_0=1$，所以切点为 $(1,1)$，故切线方程为 $y-1=2(x-1)$，即 $2x-y-1=0$，故选 C.

3. B　**解析**：$y'=3x^2$，因为 $k=3$，所以 $3x^2=3$，所以 $x=\pm1$，则 P 点坐标为 $(-1,-1)$ 或 $(1,1)$.

4. D　**解析**：因为 $f'(x)=(\sqrt[3]{x})'=(x^{\frac{1}{3}})'=\frac{1}{3}\cdot x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$，所以 $f'(-1)=\frac{1}{3}$.

5. A　**解析**：因为 $f'(x)=ax^{a-1}$，所以 $f'(-1)=a(-1)^{a-1}=-4$，故 $a=4$.

6. A　**解析**：因为 $y=x^{-\frac{1}{2}}$，所以 $y'=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$，所以曲线在点 $(a,a^{-\frac{1}{2}})$ 处的切线斜率 $k=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}$，所以切线方程为 $y-a^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}}\cdot(x-a)$. 令 $x=0$ 得 $y=\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}$；令 $y=0$ 得 $x=3a$. 因为该切线与两坐标轴围成的三角形的面积为 $S=\frac{1}{2}\cdot 3a\cdot\frac{3}{2}a^{-\frac{1}{2}}=\frac{9}{4}a^{\frac{1}{2}}=18$，所以 $a=64$.

7. BCD　**解析**：因为 $y=\ln 2$ 为常数，所以 $y'=0$，故 A 错误，B，C，D 正确，故选 BCD.

8. $y=2x$　**解析**：将 $x=1$ 代入 $y=x^2+1$ 得 $y=2$，所以切点为 $(1,2)$. 由 $y'=2x$ 得 $y'\Big|_{x=1}=2$，所以切线方程为 $y-2=2(x-1)$，即 $y=2x$.

9. $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$　**解析**：令 $y'=2x=\tan\frac{\pi}{4}=1$，$x=\frac{1}{2}$，将 $x=\frac{1}{2}$ 代入 $y=x^2$ 得 $y=\frac{1}{4}$，所以所求点为 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

10. $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7\pi}{12}$或$\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{11\pi}{12}$　解析：$y'=(\cos x)'=-\sin x$.

由导数的几何意义，得$-\sin x=\frac{1}{2}(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$，所以$x=\frac{7\pi}{6}$或$x=\frac{11\pi}{6}$.

当$x=\frac{7\pi}{6}$时，$y=\cos\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

当$x=\frac{11\pi}{6}$时，$y=\cos\frac{11\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由点$\left(\frac{7\pi}{6},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在直线$y=\frac{1}{2}x+b$上，得$b=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{7\pi}{12}$；由点$\left(\frac{11\pi}{6},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$在直线$y=\frac{1}{2}x+b$上，得$b=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{11\pi}{12}$.

11. 解：设$A(x_0,y_0)$，则由$f(x)=\sin x$，得$f'(x)=\cos x$，所以直线l斜率为$k=\cos x_0$，方程为$y-y_0=\cos x_0(x-x_0)$，令$y=0$，得$x=x_0-\frac{y_0}{\cos x_0}=x_0-\frac{\sin x_0}{\cos x_0}=x_0-\tan x_0$，即$B(x_0-\tan x_0,0)$.

由题意，$P\left(\frac{\pi}{2},1\right)$，$C(x_0,0)$，所以$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(\tan x_0,y_0)\cdot(\tan x_0,0)=\tan^2 x_0$.

又由$l\parallel OP$，得$\cos x_0=\frac{2}{\pi}$，所以$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\tan^2 x_0=\frac{\pi^2-4}{4}$.

12. 解：由$y=x^2$，得$y'=2x$，所以$k=2x_1$，过点A的切线方程为$y-y_1=2x_1(x-x_1)$，即$y=2x_1x-2x_1^2+y_1=2x_1x-x_1^2$，从而$b=-x_1^2$.

由$y=x^3$，得$y'=3x^2$，所以$k=3x_2^2$，过点B的切线方程为$y-y_2=3x_2^2(x-x_2)$，即$y=3x_2^2x-3x_2^3+y_2=3x_2^2x-2x_2^3$，从而$b=-2x_2^3$.

所以$\begin{cases}2x_1=3x_2^2,\\-x_1^2=-2x_2^3,\end{cases}$即$\begin{cases}2x_1=3x_2^2,\\x_1^2=2x_2^3,\end{cases}$两式相除，得$\frac{x_1^2}{2x_1}=\frac{2x_2^3}{3x_2^2}$，从而$\frac{x_1}{x_2}=\frac{4}{3}$.

1.2.2 函数的和、差、积、商的导数

1. B　解析：因为$f'(x)=3ax^2+6x$，且$f'(-1)=3a-6=4$，解得$a=\frac{10}{3}$，故选B.

2. D　解析：由$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x}{1+x}=\frac{1}{\frac{1}{x}+1}$，得$f(x)=\frac{1}{x+1}$，从而$f'(x)=-\frac{1}{(1+x)^2}$，故选D.

3. A　解析：依题意得$f'(x)=g'(x)+2x$，$f'(1)=g'(1)+2=4$.

4. C　解析：因为$f(x)=\frac{1}{3}x^3-f'(-1)\cdot x^2+x+5$，所以$f'(x)=x^2-2f'(-1)\cdot x+1$，将$x=-1$代入上式得$f'(-1)=1+2f'(-1)+1$，所以$f'(-1)=-2$，再令$x=1$，得$f'(1)=6$.

5. B　解析：$\left(x+\frac{1}{x}\right)'=1-\frac{1}{x^2}$，$(3^x+\ln 3)'=3^x\ln 3$，$(x^2\cos x)'=2x\cdot\cos x-x^2\cdot\sin x$.

6. B　解析：$y'=\left(\frac{x^2+a^2}{x}\right)'=\frac{2x\cdot x-(x^2+a^2)}{x^2}=\frac{x^2-a^2}{x^2}$，由$x_0^2-a^2=0$得$x_0=\pm a$.

7. ACD　解析：因为$f'(x)=x'\cos x+x(\cos x)'-\cos x=-x\sin x$，所以$f'(-x)=x\sin(-x)=-x\sin x=f'(x)$. 所以$f'(x)$为偶函数.

8. $(0,1)$　解析：由$f'(x)=\frac{1}{x}-x>0$且$x>0$，得$0<x<1$.

9. $2x-y=0$　解析：因为$f(x)$是偶函数，所以$x>0$时，$-x<0$，$f(x)=f(-x)=\frac{e^x}{e}+x$，所以当$x>0$时，$f'(x)=e^{x-1}+1$，则$k=2$，所求切线方程为$y-2=2(x-1)$，即$y=2x$.

10. x_0　解析：$f(x)=\frac{\ln x}{1+x}-\ln x=\frac{-x\ln x}{1+x}$，

所以$f'(x)=-\frac{1+x+\ln x}{(1+x)^2}(x>0)$.

由已知得$f'(x_0)=0$，即$1+x_0+\ln x_0=0$，

所以$f(x_0)=-x_0\cdot\frac{\ln x_0}{1+x_0}=x_0$.

11. 解：(1)(方法一)因为$y=(1-\sqrt{x})\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)=1+\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}-1=\frac{1}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}$，所以$y'=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)$.

(方法二)$y'=(1-\sqrt{x})'\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+(1-\sqrt{x})\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+(1-\sqrt{x})\cdot\left(-\frac{1}{2x\sqrt{x}}\right)=-\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{2x\sqrt{x}}=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x}}{x}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)$.

(2)$y'=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'x-x'\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$.

(3)$y'=(xe^x)'=x'e^x+x(e^x)'=(1+x)e^x$.

(4)因为$y=x(x\sin x+\cos x)=x^2\sin x+x\cos x$，所以$y'=2x\sin x+x^2\cos x+\cos x-x\sin x$

$=x\sin x+x^2\cos x+\cos x$.

12. (1)解:由题意,$f(2)=\frac{7\times2-12}{4}=\frac{1}{2}$,所以 $2a-\frac{b}{2}=\frac{1}{2}$.又 $f'(x)=a+\frac{b}{x^2}$,且 $f'(2)=\frac{7}{4}$,所以 $a+\frac{b}{4}=\frac{7}{4}$.联立解得 $a=1$,$b=3$,所以 $f(x)=x-\frac{3}{x}$.

(2)证明:设曲线 $y=f(x)$ 在任一点 (x_0,y_0) 处的切线斜率为 k,则由 $f'(x)=1+\frac{3}{x^2}$,得 $k=1+\frac{3}{x_0^2}$,所以切线方程为 $y-y_0=\left(1+\frac{3}{x_0^2}\right)(x-x_0)$,即 $y-x_0+\frac{3}{x_0}=\left(1+\frac{3}{x_0^2}\right)(x-x_0)$.

令 $x=0$,得 $y=-\frac{6}{x_0}$;令 $y=x$,得 $x=2x_0$.令 $A\left(0,-\frac{6}{x_0}\right)$,$B(2x_0,2x_0)$,$O(0,0)$,则切线与直线 $x=0$ 和直线 $y=x$ 所围成的△ABO 的面积 $S=\frac{1}{2}\times\left|-\frac{6}{x_0}\right|\cdot|2x_0|=6$ 为定值.

1.2.3 简单复合函数的导数

1. C 解析:$y'=e^{x-1}+xe^{x-1}=(x+1)e^{x-1}$,故曲线在点(1,1)处的切线斜率为 $y'\big|_{x=1}=2$.

2. A 解析:$y'=2\sin x\cdot(\sin x)'=2\sin x\cdot\cos x=\sin 2x$.

3. A 解析:设 $x^2=u$,则 $y'=f'(u)\cdot u'=f'(x^2)\cdot(x^2)'=2xf'(x^2)$.

4. B 解析:由题意知 $y'\big|_{x=0}=ae^{ax}\big|_{x=0}=a=2$.故选B.

5. A 解析:因为函数 $y=\log_2(5-3x)$ 是 $y=\log_2u$,$u=5-3x$ 复合而成的函数,所以 $y'_x=y'_u\cdot u'_x=(\log_2u)'\cdot(5-3x)'=-3\cdot\frac{1}{u\ln 2}=\frac{3}{(3x-5)\ln 2}$.故选A.

6. D 解析:令 $f(x)=ax-\ln(x+1)$,则 $f'(x)=a-\frac{1}{x+1}$.由导数的几何意义,可得在点(0,0)处的切线的斜率为 $f'(0)=a-1$.又切线方程为 $y=2x$,则有 $a-1=2$,所以 $a=3$.

7. BCD 解析:A中的函数是一个多项式函数,B中的函数可看作函数 $u=x+\frac{\pi}{4}$,$y=\cos u$ 的复合函数,C中的函数可看作函数 $u=\ln x$,$y=\frac{1}{u}$ 的复合函数,D中的函数可看作函数 $u=2x+3$,$y=u^4$ 的复合函数,故选BCD.

8. $2^x\ln2-\frac{5}{1-5x}$

9. $(-\infty,-3)$ 解析:因为 $y'=ae^{ax}+3$,于是由 $y'=0$,得 $x=\frac{1}{a}\ln\left(-\frac{3}{a}\right)$,而 $-\frac{3}{a}>0$,即 $a<0$,又 $\begin{cases}a<0,\\0<-\frac{3}{a}<1,\end{cases}$ 所以 $a<-3$.

10. (1)$\frac{2}{\cos^2(2x-1)}$;

(2)$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2x\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$

解析:(1)$f'(x)=\left[\frac{\sin(2x-1)}{\cos(2x-1)}\right]'$
$=\frac{2\cos^2(2x-1)+2\sin^2(2x-1)}{\cos^2(2x-1)}=\frac{2}{\cos^2(2x-1)}$.

(2)$f'(x)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+x\left[\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\right]'$
$=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+2x\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$.

11. 解:因为 $f(x)=x+\ln(1+x)$,所以 $f'(x)=1+\frac{1}{1+x}$,所以曲线 $f(x)$ 在点(e−1,e)处的切线斜率为 $k=f'(e-1)=1+\frac{1}{e}$,所以切线方程为 $y-e=\left(1+\frac{1}{e}\right)(x-e+1)$.令 $x=0$,得 $y=\frac{1}{e}$;令 $y=0$,得 $x=-\frac{1}{1+e}$.所以切线与坐标轴围成的三角形面积为 $S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{e}\times\frac{1}{1+e}=\frac{1}{2(1+e)e}$.

12. 解:因为 $f'(x)=2ax+2\cdot\frac{1}{2-x}\cdot(2-x)'=2ax-\frac{2}{2-x}$,所以曲线 $f(x)$ 在点 $(1,f(1))$ 处的切线斜率 $k=f'(1)=2a-2$.又 $f(1)=a$,所以切线 l 的方程为 $y-a=2(a-1)(x-1)$,即 $y=2(a-1)x-a+2$.

设直线 l 与曲线 $g(x)=x^2+2x$ 相切于点 (x_0,y_0),则由 $g'(x)=2x+2$,得 $k=2x_0+2$,切线方程为 $y-y_0=(2x_0+2)(x-x_0)$,即 $y=(2x_0+2)(x-x_0)+x_0^2+2x_0=(2x_0+2)x-x_0^2$.由题意,$\begin{cases}2x_0+2=2(a-1),\\-x_0^2=-a+2,\end{cases}$ 所以 $\begin{cases}x_0=a-2,\\x_0^2=a-2,\end{cases}$ 所以 $(a-2)^2=a-2$,解得 $a=2$ 或 $a=3$.

1.3 导数在研究函数中的应用

1.3.1 单 调 性

1. A 解析:因为 $f'(x)=1+\frac{1}{x}$,又 $x\in(0,6)$,所以

$f'(x)>0$,所以函数在$(0,6)$上单调递增.

2. D　解析:由导函数的图象可知,当$x<0$时,$f'(x)>0$,即函数$f(x)$为增函数;当$0<x<2$时,$f'(x)<0$,即$f(x)$为减函数;当$x>2$时,$f'(x)>0$,即函数$f(x)$为增函数.观察选项易知D正确.

3. D　解析:从$f'(x)$的图象可以看出,在区间$\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$内,导数递增;在区间$\left(\frac{a+b}{2},b\right)$内,导数递减.即函数$f(x)$的图象在$\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$内越来越陡,在$\left(\frac{a+b}{2},b\right)$内越来越平缓.故选D.

4. A　解析:求函数的导函数$f'(x)=3x^2+2ax+b$,导函数对应方程$f'(x)=0$的$\Delta=4(a^2-3b)<0$,所以$f'(x)>0$恒成立,故$f(x)$是增函数.

5. A　解析:由题意,得$f'(x)=3ax^2+1=0$恰有两个相异实数根,所以$a<0$.故选A.

6. C　解析:因为$f'(x)-g'(x)>0$,所以$(f(x)-g(x))'>0$,所以$f(x)-g(x)$在$[a,b]$上是单调增函数,所以当$a<x<b$时$f(x)-g(x)>f(a)-g(a)$,所以$f(x)+g(a)>g(x)+f(a)$.

7. CD　解析:由题意知$f'(x)\geqslant 0$对任意的$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$恒成立,又$f'(x)=2x+a-\frac{1}{x^2}$,所以$2x+a-\frac{1}{x^2}\geqslant 0$对任意的$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$恒成立,若满足题意,需$a\geqslant\left(\frac{1}{x^2}-2x\right)_{\max}$.令$h(x)=\frac{1}{x^2}-2x$,$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$.因为$h'(x)=-\frac{2}{x^3}-2$,所以当$x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$时,$h'(x)<0$,即$h(x)$在$\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$上单调递减,所以$h(x)<h\left(\frac{1}{2}\right)=3$,故$a\geqslant 3$.故选CD.

8. $\left(0,\frac{1}{2}\right]$　解析:由$f'(x)=4x-\frac{1}{x}\leqslant 0(x>0)$,得$0<x\leqslant\frac{1}{2}$.所以函数$f(x)$的单调减区间为$\left(0,\frac{1}{2}\right]$.

9. $\left[4,\frac{17}{2}\right)$　解析:由$g'(x)=\frac{-4x^2+ax-1}{x}=0$,得$-4x^2+ax-1=0$.因为$g(x)$在区间$\left(\frac{1}{4},2\right)$上不是单调函数,所以方程$-4x^2+ax-1=0$,即$a=4x+\frac{1}{x}$在区间$\left(\frac{1}{4},2\right)$有实根,设$y_1=a$,$y_2=4x+\frac{1}{x}$,则由$4\leqslant y_2<\frac{17}{2}$得$4\leqslant a<\frac{17}{2}$.

10. $(1,+\infty)$　解析:设$F(x)=f(x)-x-1$,则由$f'(x)<1$,得$F'(x)=f'(x)-1<0$,即$F(x)$是$\mathbf{R}$上的减函数.又由$f(1)=2$,得$F(1)=f(1)-2=0$,于是由$F(x)<F(1)$,得$x>1$.

11. 解:(1)因为$f(x)=e^x-ax-1$,所以$f'(x)=e^x-a$.若$a\leqslant 0$,则$f'(x)>0$对$x\in\mathbf{R}$恒成立,所以$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,+\infty)$;

若$a>0$,则由$f'(x)=e^x-a>0$,得$x>\ln a$,所以$f(x)$的单调增区间为$(\ln a,+\infty)$,单调减区间为$(-\infty,\ln a)$.

综上所述,若$a\leqslant 0$时,函数$f(x)$的单调增区间为$(-\infty,+\infty)$;

若$a>0$时,函数$f(x)$的单调增区间为$(\ln a,+\infty)$,单调减区间为$(-\infty,\ln a)$.

(2)因为$f(x)=\ln x-ax$,所以$f'(x)=\frac{1}{x}-a$.

若$a\leqslant 0$,则$f'(x)>0$对$x\in(0,+\infty)$恒成立,所以$f(x)$的单调增区间为$(0,+\infty)$;

若$a>0$,则由$f'(x)=\frac{1}{x}-a>0$,解得$0<x<\frac{1}{a}$,所以$f(x)$的单调增区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$,单调减区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$.

综上所述,若$a\leqslant 0$时,函数$f(x)$的单调增区间为$(0,+\infty)$;若$a>0$时,函数$f(x)$的单调增区间为$\left(0,\frac{1}{a}\right)$,单调减区间为$\left(\frac{1}{a},+\infty\right)$.

12. 解:(1)$f(x)=\frac{x}{e^x}$,$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}$,所以$x<1$时,$f'(x)>0$,$f(x)$在$(-\infty,1)$上单调递增;$x>1$时,$f'(x)<0$,$f(x)$在$(1,+\infty)$上单调递减.

(2)$h(x)=mx-\ln x$,$h'(x)=m-\frac{1}{x}$.因为$\frac{1}{2}<x\leqslant 2$,所以$\frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{x}<2$.

若函数$h(x)$在区间$\left(\frac{1}{2},2\right]$上单调递增,则$h'(x)\geqslant 0$在$\left(\frac{1}{2},2\right]$上恒成立,即$m\geqslant\frac{1}{x}$在$\left(\frac{1}{2},2\right]$上恒成立,所以$m\geqslant 2$.

若函数$h(x)$在区间$\left(\frac{1}{2},2\right]$上单调递减,则$h'(x)\leqslant 0$在$\left(\frac{1}{2},2\right]$上恒成立,即$m\leqslant\frac{1}{x}$在$\left(\frac{1}{2},2\right]$上恒成立,所以$m\leqslant\frac{1}{2}$.综上所述,实数$m$的取值范围是$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup[2,+\infty)$.

1.3.2 极大值与极小值

1. C　**解析**：$f'(x)$的符号由正变负，则$f(x_0)$是极大值，$f'(x)$的符号由负变正，则$f(x_0)$是极小值，由图象易知有两个极大值点，两个极小值点.

2. D　**解析**：$f'(x)=3x^2+2ax+a+6$，因为$f(x)$既有极大值又有极小值，那么$\Delta=(2a)^2-4\times3\times(a+6)>0$，解得$a>6$或$a<-3$.

3. A　**解析**：当满足$f'(x)=0$的点，左侧$f'(x)<0$，右侧$f'(x)>0$时，该点为极小值点，观察题图，只有一个极小值点.

4. D　**解析**：由极值的概念可知只有D正确.

5. C　**解析**：由$y'=3x^2-6x-9=0$，得$x=-1$或$x=3$，当$x<-1$或$x>3$时，$y'>0$，当$-1<x<3$时，$y'<0$. 故当$x=-1$时，函数有极大值5；x取不到3，故无极小值.

6. D　**解析**：$f'(x)=12x^2-2ax-2b$，因为$f(x)$在$x=1$处有极值，所以$f'(1)=12-2a-2b=0$，所以$a+b=6$. 又$a>0,b>0$，所以$a+b\geqslant2\sqrt{ab}$，所以$2\sqrt{ab}\leqslant6$，所以$ab\leqslant9$，当且仅当$a=b=3$时等号成立，所以ab的最大值为9.

7. BC　**解析**：$y'=3x^2-3a$，当$a\leqslant0$时，$y'\geqslant0$，函数$y=x^3-3ax+a$为单调函数，不合题意，舍去；当$a>0$时，令$y'=3x^2-3a=0$，得$x=\pm\sqrt{a}$，不难分析，当$1<\sqrt{a}<2$，即$1<a<4$时，函数$y=x^3-3ax+a$在$(1,2)$内有极小值. 故选BC.

8. 极小值$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　**解析**：由$f'(x)=\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x=0$，得$x=-1$，又$f(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减，在$(-1,+\infty)$上单调递增，所以$f(-1)=-\dfrac{1}{\mathrm{e}}$为极小值.

9. $(-1,0)$　**解析**：当$a=0$时，显然不符合题意；当$a>0$时，由$f'(x)$的图象可知$x=a$时为极小值点；当$a=-1$时，$x=a$不是极值点；当$-1<a<0$时，由$f'(x)$的图象可知$x=a$是极大值点.
当$a<-1$时，由$f'(x)$的图象可知$x=a$是极小值点.
综上所述，$-1<a<0$.

10. 极小值为$\dfrac{5}{6}$，极大值为$\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}\ln2$

解析：$f'(x)=\dfrac{a}{x}+2bx+1$.

由题意，得$x=1,2$是方程$\dfrac{a}{x}+2bx+1=0$的两根，

所以$\begin{cases}a+2b+1=0,\\ \dfrac{a}{2}+4b+1=0,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-\dfrac{2}{3},\\ b=-\dfrac{1}{6}.\end{cases}$

$f(x)=-\dfrac{2}{3}\ln x-\dfrac{1}{6}x^2+x$.

从而$f'(x)=-\dfrac{2}{3x}-\dfrac{1}{3}x+1$.

当$x\in(0,1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(1,2)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(2,+\infty)$时，$f'(x)<0$.

所以在$x=1$处函数取得极小值$\dfrac{5}{6}$；在$x=2$处函数取得极大值$\dfrac{4}{3}-\dfrac{2}{3}\ln2$.

11. **解**：(1) 由$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$，得$f'(x)=3x^2+2ax+b$. 因为$f(0)=c$，$f'(0)=b$，所以曲线$y=f(x)$在点$(0,f(0))$处的切线方程为$bx-y+c=0$.
(2) 当$a=b=4$时，$f(x)=x^3+4x^2+4x+c$，
所以$f'(x)=3x^2+8x+4=(3x+2)(x+2)$. 令$f'(x)=0$，得$x=-2$或$x=-\dfrac{2}{3}$. $f(x)$在$f'(x)$在区间$(-\infty,+\infty)$上的情况如下：

x	$(-\infty,-2)$	-2	$\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},+\infty\right)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	c	↘	$c-\frac{32}{27}$	↗

所以，当$c>0$且$c-\dfrac{32}{27}<0$时，存在$x_1\in(-\infty,-2)$，$x_2\in\left(-2,-\dfrac{2}{3}\right)$，$x_3\left(-\dfrac{2}{3},\infty\right)$，使得$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$.

由$f(x)$的单调性知，当且仅当$c\in\left(0,\dfrac{32}{27}\right)$时，函数$f(x)=x^3+4x^2+4x+c$有三个不同的零点.

12. **解**：(1)$f'(x)=5x^4+3ax^2+b$. 由题意，$f'(\pm1)=5+3a+b=0$.
若$f(1)-f(-1)=4$，即$2a+2b+2=4$，则$a+b=1$，于是由$\begin{cases}5+3a+b=0,\\a+b=1,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-3,\\b=4,\end{cases}$从而$f(x)=x^5-3x^3+4x+1$，$f'(x)=5x^4-9x^2+4=(x^2-1)(5x^2-4)$，这与题意仅在$x=\pm1$处取得极值不符，舍去.
若$f(-1)-f(1)=4$，即$-2a-2b-2=4$，则$a+b=-3$，于是由$\begin{cases}5+3a+b=0,\\a+b=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\end{cases}$从而$f(x)=x^5-x^3-2x+1$，$f'(x)=5x^4-3x^2-2=(x^2-1)(5x^2+2)$，当且仅当$x=\pm1$时取得极值，所以$a=-1,b=-2$.
(2)由(1)得$f'(x)=x^5-x^3-2x+1$，$f'(x)=(x-1)(x+1)(5x^2+2)$.

列表,得

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	极小	↗

所以,当 $x=-1$ 时,$f(x)_{极大值}=f(-1)=3$;当 $x=1$ 时,$f(x)_{极小值}=f(1)=-1$.

1.3.3 最大值与最小值

1. A　解析:据题 $f(x)$ 为常数函数,故 $f'(x)=0$.

2. B　解析:$y'=e^{-x}-x\cdot e^{-x}=e^{-x}(1-x)$,令 $y'=0$,所以 $x=1$,所以 $f(0)=0,f(4)=\frac{4}{e^4},f(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$,所以 $f(1)$ 为最大值,故选 B.

3. C　解析:$f'(x)=3x^2-3$. 令 $f'(x)=0$,即 $3x^2-3=0$,解得 $x=\pm1$. 当 $x\in(-\infty,-1)$ 时,$f'(x)>0$;当 $x\in(-1,1)$ 时,$f'(x)<0$;当 $x\in(1,+\infty)$ 时,$f'(x)>0$. 所以 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极大值,$f(x)_{极}$ 大值$=3$,在 $x=1$ 处取得极小值,$f(x)_{极小值}=-1$. 而端点处的函数值 $f(-3)=-17,f(0)=1$,比较可得 $f(x)$ 的最大值为 3,最小值为 -17.

4. D　解析:$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$,当 $x\in(-1,1)$ 时,$f'(x)<0$,所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上是单调减函数,无最大值和最小值,故选 D.

5. A　解析:因为 $f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$,依题意知 $f'(x)=0$ 在 $(0,1)$ 内有解,所以 $0<a<1$. 故选 A.

6. D　解析:$f'(x)=4ax^3-12ax^2$ $(a>0,x\in[1,4])$. 由 $f'(x)=0$,得 $x=3$ 或 $x=0$(舍去). 则 $x=3$ 时,$f(x)$ 取到最小值为 $b-27a$. 又 $f(1)=b-3a$,$f(4)=b$,所以 $f(4)$ 为最大值. 由 $\begin{cases}b=3,\\b-27a=-6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{3},\\b=3,\end{cases}$ 所以 $a+b=\frac{10}{3}$.

7. ABC　解析:由函数极值、最值的概念及它们的区别与联系可知 A、B、C 都是错误的,只有 D 是正确的,其中对于 B,在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值,在闭区间上不连续的函数不一定有最值,故 B 是错误的,应选 ABC.

8. $-\frac{1}{e}$　解析:由 $f'(x)=\ln x+1=0$,得 $x=\frac{1}{e}$,当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 时,$f'(x)<0$,当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 时,$f'(x)>0$,所以 $f(x)_{\min}=f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$.

9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$　解析:由 $f'(x)=\frac{1}{2}e^x(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}e^x(\cos x-\sin x)=e^x\cos x\geqslant0$ 恒成立$\left(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$,故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 单上调递增. 又因为 $f(0)=\frac{1}{2},f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$,所以 $f(x)_{\min}=\frac{1}{2}$,$f(x)_{\max}=\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}$.

10. $\frac{1}{e}$　解析:当 $x>0$ 时,$f(x)=x\ln x,f'(x)=1+\ln x$. 当 $f'(x)>0,x>\frac{1}{e}$,则 $f(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减,在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增,所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $f\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$. 又 $f(x)$ 为奇函数,所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上的最大值为 $\frac{1}{e}$.

11. 解:(1)因为 $f(x)=ax+\ln x$ 在 $(1,e)$ 上有极值,所以 $f'(x)=0$ 在 $(1,e)$ 上有解,所以 $f'(x)=a+\frac{1}{x}=0$ 在 $(1,e)$ 上有解,所以 $a=-\frac{1}{x}\in\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$,所以 $-1<a<-\frac{1}{e}$. 所以 a 的取值范围是 $\left(-1,-\frac{1}{e}\right)$.

(2)由(1)知,$f'(x)=a+\frac{1}{x}=0$ 在区间 $(1,e)$ 上有解,所以 $x=-\frac{1}{a}$,$f'(x)=\frac{ax+1}{x}$. 因为 $a<0$,所以 $f(x)$ 在 $\left(1,-\frac{1}{a}\right)$ 上单调递增,在 $\left(-\frac{1}{a},e\right)$ 上单调递减,所以 $f(x)_{\max}=f\left(-\frac{1}{a}\right)=-1+\ln\left(-\frac{1}{a}\right)$,$f(x)_{\min}=\min\{f(1),f(e)\}$.

因为 $f(1)=a,f(e)=ae+1$,所以 $f(e)-f(1)=a(e-1)+1\left(-1<a<-\frac{1}{e}\right)$.

当 $-1<a\leqslant-\frac{1}{e-1}$ 时,$f(e)\leqslant f(1)$,所以 $f(x)_{\min}=f(e)=ae+1$;

当 $-\frac{1}{e-1}<a<-\frac{1}{e}$ 时,$f(e)>f(1)$,所以 $f(x)_{\min}=f(1)=a$.

综上可知,$f(x)$ 的最大值为 $-1+\ln\left(-\frac{1}{a}\right)$;

当 $-1<a\leqslant-\frac{1}{e-1}$ 时,$f(x)$ 的最小值是 $ae+1$,

当 $-\frac{1}{e-1}<a<-\frac{1}{e}$ 时,$f(x)$ 的最小值是 a.

12. 解:(1) $f'(x)=3ax^2-6x$. 因为 $f'(2)=0$,所以 $12a-12=0$,所以 $a=1$.

(2) $g(x)=ax^3-3x^2+3ax^2-6x=ax^3+3(a-1)x^2-6x$, $g(0)=0$.

当 $g(x)$ 在区间 $[0,2]$ 上的最大值为 $g(0)$ 时,$ax^3+3(a-1)x^2-6x\leqslant 0$ 对一切 $x\in(0,2]$ 都成立,即 $a\leqslant\dfrac{3x+6}{x^2+3x}$ 对一切 $x\in(0,2]$ 都成立.

令 $F(x)=\dfrac{3x+6}{x^2+3x}$, $x\in(0,2]$,

则 $a\leqslant[F(x)]_{\min}$.

由 $F'(x)=\dfrac{-3(x+2)^2-6}{(x^2+3x)^2}<0$,可知 $F(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减,

所以 $[F(x)]_{\min}=F(2)=\dfrac{6}{5}$,

故 a 的取值范围是 $\left(-\infty,\dfrac{6}{5}\right]$.

1.4 导数在实际生活中的应用

第 1 课时 导数在实际生活中的应用(1)

1. C 解析:$y'=-\dfrac{3}{8}t^2-\dfrac{3}{2}t+36$,令 $y'=0$ 解得 $t=8$ 或 $t=-12$(舍),当 $0<t<8$ 时,$y'>0$;当 $t>8$ 时,$y'<0$,所以 $t=8$ 为函数的最大值点. 所以 $t=8$ 时,通过该路段用时最多.

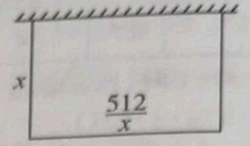
2. A 解析:设利润为 y,则 $y=y_1-y_2=17x^2-(2x^3-x^2)=-2x^3+18x^2\ (x>0)$,所以 $y'=-6x^2+36x=-6x(x-6)$. 令 $y'=0$,解得 $x=0$(舍去)或 $x=6$,经检验知 $x=6$ 既是函数的极大值点又是函数的最大值点.

3. C 解析:设 x 套为没有租出去的公寓数,则收入函数 $f(x)=(1\,000+50x)(50-x)-100(50-x)$,所以 $f'(x)=1\,600-100x$,所以当 $x=16$ 时,$f(x)$ 取最大值,故把月租金定为 1 800 元时收入最大.

4. A 解析:设总运费与总存储费之和为 y 万元,依题意 $y=\dfrac{900}{x}\times4+4x=4\left(\dfrac{900}{x}+x\right)\geqslant 240$,当且仅当 $\dfrac{900}{x}=x$,即 $x=30$ 时,两种费用之和取最小值.

5. C 解析:因为 $v=s'(t)=t^3-12t^2+32t$, $a=v'(t)=3t^2-24t+32=3(t-4)^2-16$,所以当 $t=4$ 时,加速度最小.

6. B 解析:如图所示,设场地一边长为 x m,则另一边长为 $\dfrac{512}{x}$ m,因此新墙总长度 $L=2x+\dfrac{512}{x}\ (x>0)$, $L'=2-\dfrac{512}{x^2}$. 令 $L'=2-\dfrac{512}{x^2}=0$,得 $x=16$ 或 $x=-16$. 因为 $x>0$,所以 $x=16$. 因为 L 在 $(0,+\infty)$ 上只有一个极值点,所以它必是最小值点. 因为 $x=16$,所以 $\dfrac{512}{x}=32$. 故当堆料场的宽为 16 m,长为 32 m 时,可使砌墙所用的材料最省.



7. ABD 解析:由 $s'=t^3-5t^2+4t=0$,得 $t(t^2-5t+4)=0$, $t(t-1)(t-4)=0$, $t_1=0$, $t_2=1$, $t_3=4$,即 $t=0$ 或 1 或 4 时,速度为 0.

8. 20 km/h 解析:设速度为 v km/h,全程为 s km,燃料费为 $m=kv^2$,当 $v=10$ 时,$m=120$,解得 $k=1.2$,则总费用 $y=(1.2v^2+480)\cdot\dfrac{s}{v}$,由 $y'=\left(1.2-\dfrac{480}{v^2}\right)s=0$,得 $v=20$.

9. $10\sqrt[3]{20}$ km/h 解析:设速度为 x km/h,全程为 a km,则总费用

$f(x)=(kx^3+200)\cdot\dfrac{a}{x}=a\left(kx^2+\dfrac{200}{x}\right)\ (0<x\leqslant100)$.

因为 $40=k\cdot20^3$,所以 $k=\dfrac{1}{200}$,

所以 $f(x)=a\left(\dfrac{1}{200}x^2+\dfrac{200}{x}\right)$.

因为 $f'(x)=a\left(\dfrac{x}{100}-\dfrac{200}{x^2}\right)=\dfrac{a(x^3-20\,000)}{100x^2}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=10\sqrt[3]{20}$.

当 $10\sqrt[3]{20}<x<100$ 时,$f'(x)>0$;当 $0<x<10\sqrt[3]{20}$ 时,$f'(x)<0$.

故当 $x=10\sqrt[3]{20}$ 时,$f(x)$ 取最小值.

即当速度为 $10\sqrt[3]{20}$ km/h 时,全程总费用最少.

10. 80 千米/小时 11.25 解析:速度为 x 千米/小时,汽车从甲地到乙地行驶了 $\dfrac{100}{x}$ 小时. 设耗油量为 $h(x)$ 升,则依题意,得 $h(x)=\left(\dfrac{1}{128\,000}x^3-\dfrac{3}{80}x+8\right)\cdot\dfrac{100}{x}=\dfrac{1}{1\,280}x^2+\dfrac{800}{x}-\dfrac{15}{4}\ (0<x\leqslant120)$,则 $h'(x)=\dfrac{x}{640}-\dfrac{800}{x^2}=\dfrac{x^3-80^3}{640x^2}\ (0<x\leqslant120)$,

令 $h'(x)=0$,得 $x=80$.

当 $x\in(0,80)$ 时,$h'(x)<0$, $h(x)$ 是减函数;当 $x\in(80,120)$ 时,$h'(x)>0$, $h(x)$ 是增函数. 所以当 $x=80$ 时,$h(x)$ 取到极小值 $h(80)=11.25$.

因为 $h(x)$ 在 $(0,120]$ 上只有一个极值,所以它是最小值.

11. 解:(1)设列车的速度为 v km/h,则列车完成全程路线所需的总费用与车速的函数关系式为 $y=(kv^3+\lambda a)\cdot\frac{35}{v}$.

由题意,得 $100^3k=a$,所以 $k=\frac{a}{10^6}$.

所以 $y=\left(\frac{a}{10^6}v^3+\lambda a\right)\cdot\frac{35}{v}=35a\left(\frac{v^2}{10^6}+\frac{\lambda}{v}\right)$ $(0<v\leqslant550)$.

(2)$y'=35a\left(\frac{v^2}{10^6}+\frac{\lambda}{v}\right)'=35a\left(\frac{2v}{10^6}-\frac{\lambda}{v^2}\right)$.

令 $y'=0$,得 $v^3=\frac{10^6}{2}\lambda=\frac{10^6}{2}\times432=216\times10^6=600^3$,所以 $v=600$. 又因为 $600\notin(0,550]$,且由 $y'<0(0<v\leqslant550)$知,函数 $y=f(v)$在$(0,550]$上单调递减,所以 $v=550$ km/h 时,函数 $y=f(v)$取最小值. 故当车速为 550 km/h 时,运行的总费用最低.

12. 解:(1)当 $20\leqslant x\leqslant180$ 时,由

$\begin{cases}a-b\cdot\sqrt{20}=60,\\a-b\cdot\sqrt{180}=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}a=90,\\b=3\sqrt{5}.\end{cases}$

故 $q(x)=\begin{cases}\frac{1\,260}{x+1}, & 0<x\leqslant20,\\90-3\sqrt{5x}, & 20<x\leqslant180,\\0, & x>180.\end{cases}$

(2)设总利润 $f(x)=x\cdot q(x)$,

由(1)得 $f(x)=$

$\begin{cases}\frac{126\,000x}{x+1}, & 0<x\leqslant20,\\9\,000x-300\sqrt{5}\cdot x\sqrt{x}, & 20<x\leqslant180.\\0, & x>180.\end{cases}$

当 $0<x\leqslant20$ 时,$f(x)=\frac{126\,000x}{x+1}=126\,000-\frac{126\,000}{x+1}$,$f(x)$在$(0,20]$上单调递增,所以当 $x=20$ 时,$f(x)$有最大值 120 000.

当 $20<x\leqslant180$ 时,$f(x)=9\,000x-300\sqrt{5}\cdot x\sqrt{x}$,

$f'(x)=9\,000-450\sqrt{5}\cdot\sqrt{x}$.

令 $f'(x)=0$,得 $x=80$.

当 $20<x<80$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$单调递增,

当 $80<x\leqslant180$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$单调递减,

所以当 $x=80$ 时,$f(x)$有最大值 240 000.

当 $x>180$ 时,$f(x)=0$.

答:当 x 为 80 时,总利润取得最大值 240 000 元.

第 2 课时　导数在实际生活中的应用(2)

1. B　**解析**:设矩形与半圆直径垂直的一边的长为 x,则另一边长为 $2\sqrt{R^2-x^2}$,则 $l=2x+4\sqrt{R^2-x^2}$ $(0<x<R)$,$l'=2-\frac{4x}{\sqrt{R^2-x^2}}$. 令 $l'=0$,解得 $x_1=\frac{\sqrt{5}}{5}R$,$x_2=-\frac{\sqrt{5}}{5}R$(舍去). 当 $0<x<\frac{\sqrt{5}}{5}R$ 时,$l'>0$;当$\frac{\sqrt{5}}{5}R<x<R$ 时,$l'<0$. 所以当 $x=\frac{\sqrt{5}}{5}R$ 时,l 取最大值,即周长最大的矩形的相邻两边长分别为$\frac{\sqrt{5}}{5}R$,$\frac{4\sqrt{5}}{5}R$.

2. D　**解析**:设圆锥的高为 x cm,则底面半径为 $\sqrt{20^2-x^2}$ cm. 其体积为 $V=\frac{1}{3}\pi x(20^2-x^2)$ $(0<x<20)$,$V'=\frac{1}{3}\pi(400-3x^2)$. 令 $V'=0$,解得 $x_1=\frac{20\sqrt{3}}{3}$,$x_2=-\frac{20\sqrt{3}}{3}$(舍去). 当 $0<x<\frac{20\sqrt{3}}{3}$时,$V'>0$;当$\frac{20\sqrt{3}}{3}<x<20$ 时,$V'<0$. 所以当 $x=\frac{20\sqrt{3}}{3}$时,V 取最大值.

3. A　**解析**:设圆柱的底面半径为 r,高为 h,体积为 V,则 $4r+2h=l$,所以 $h=\frac{l-4r}{2}$,$V=\pi r^2h=\frac{l}{2}\pi r^2-2\pi r^3\left(0<r<\frac{l}{4}\right)$. 则 $V'=l\pi r-6\pi r^2$,令 $V'=0$,得 $r=0$ 或 $r=\frac{l}{6}$,而 $r>0$,所以 $r=\frac{l}{6}$是其唯一的极值点. 所以当 $r=\frac{l}{6}$时,V 取得最大值,最大值为 $\left(\frac{l}{6}\right)^3\pi$.

4. C　**解析**:设圆柱形铁桶的底面半径为 r,高为 h,总造价为 y,单位面积铁的造价为 a,则 $V=\pi r^2h$,$y=\pi r^2\cdot3a+\pi r^2\cdot a+2\pi rh\cdot a=a\pi\left(4r^2+\frac{2V}{\pi r}\right)$,则 $y'=a\pi\left(8r-\frac{2V}{\pi r^2}\right)$. 令 $y'=0$,得 $r=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}$,$h=\frac{V}{\pi r^2}=2\sqrt[3]{\frac{2V}{\pi}}$.

5. B　**解析**:设水箱底边长为 x cm,则水箱高 $h=60-\frac{x}{2}$(cm). 水箱容积 $V=V(x)=x^2h=60x^2-\frac{x^3}{2}$ $(0<x<120)$. $V'(x)=120x-\frac{3}{2}x^2$. 令 $V'(x)=0$,得 $x=0$(舍去)或 $x=80$. 可判断得 $x=80$ cm 时,V 取最大值为 128 000 cm^3.

6. C　**解析**:设圆柱的底面半径为 R,母线长为 L,则 $V=\pi R^2L=27\pi$,所以 $L=\frac{27}{R^2}$,要使用料最省,只须使圆柱表面积最小,由题意,$S_{表}=\pi R^2+2\pi RL=$

$\pi R^2+2\pi\cdot\frac{27}{R}$,所以 $S'(R)=2\pi R-\frac{54\pi}{R^2}=0$,所以 $R=3$.则当 $R=3$ 时,$S_{表}$最小.

7. ABD 解析:设容器底面短边长为 x m,则另一边长为$(x+0.5)$ m,高为$\frac{1}{4}[14.8-4x-4(x+0.5)]=(3.2-2x)$ m.由 $3.2-2x>0$ 及 $x>0$,得 $0<x<1.6$.设容器容积为 y,则有 $y=x(x+0.5)\cdot(3.2-2x)=-2x^3+2.2x^2+1.6x(0<x<1.6)$,$y'=-6x^2+4.4x+1.6$.由 $y'=0$ 及 $0<x<1.6$,解得 $x=1$.在定义域$(0,1.6)$内,只有 $x=1$ 使 $y'=0$.由题意,若 x 过小(接近于 0)或过大(接近于 1.6),y 的值都很小(接近于 0).因此当 $x=1$ 时,y 取最大值,且 $y_{\max}=-2+2.2+1.6=1.8(\text{m}^3)$,这时高为 1.2 m.

8. 20 m,40 m 解析:设矩形温室的一边长为 x m,另一边长为$\frac{800}{x}$ m.蔬菜的种植面积 $S(x)=\left(\frac{800}{x}-4\right)(x-2)=808-\frac{1\,600}{x}-4x$,令 $S'(x)=\frac{1\,600}{x^2}-4=0$,解得 $x=20$.所以当温室一边长为 20 m,另一边长为40 m时,蔬菜的种植面积最大.

9. $4\sqrt{\frac{10}{4+\pi}}$ m 解析:如图所示,设半圆的半径为 r,矩形的高为 h,则截面积 $S=2rh+\frac{\pi r^2}{2}=20$,

截面周长 $C=2r+2h+\pi r$

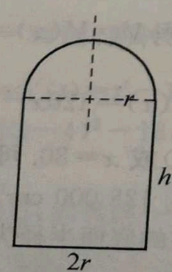
$=2r+\frac{20-\frac{\pi r^2}{2}}{r}+\pi r$

$=2r+\frac{20}{r}-\frac{\pi r}{2}+\pi r=\left(2+\frac{\pi}{2}\right)r+\frac{20}{r}$.

所以 $C'(r)=\left(2+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{20}{r^2}$,

令 $C'(r)=0$,解得 $r=2\sqrt{\frac{10}{4+\pi}}$.

故当 $r=2\sqrt{\frac{10}{4+\pi}}$ 时,周长 C 最小,即宽为 $4\sqrt{\frac{10}{4+\pi}}$ 时,截面周长最小,用料最省.



(第 9 题)

10. 30 解析:依题意设 $CD=x$,

$AC=50-x(0\leqslant x\leqslant 50)$,$BC=\sqrt{x^2+40^2}$,

水管费 $y=3a(50-x)+5a\sqrt{x^2+40^2}=a(150-3x+5\sqrt{x^2+1\,600})(0\leqslant x\leqslant 50)$.

$y'=a\left(-3+\frac{5x}{\sqrt{x^2+1\,600}}\right)$,令 $y'=0$,得 $x=30$.

当 $x\in[0,30)$时,$y'<0$,当 $x\in(30,50]$时,$y'>0$.

所以 $x=30$ 时,y 取得取小值.

11. 解:(1)因为扇形 AOC 的半径为 40m,$\angle AOC=x$rad,所以扇形 AOC 的面积 $S_{扇形AOC}=\frac{x\cdot OA^2}{2}=800x$,$0<x<\pi$.

在$\triangle COD$ 中,$OD=80$,$OC=40$,$\angle COD=\pi-x$,

所以 $S_{\triangle COD}=\frac{1}{2}OC\cdot OD\cdot\sin\angle COD$

$=1\,600\sin(\pi-x)=1\,600\sin x$,

从而 $S=S_{\triangle COD}+S_{\triangle扇形AOC}=1\,600\sin x+800x$,$0<x<\pi$.

(2)由(1)知,$S(x)=1\,600\sin x+800x$,$0<x<\pi$.

$S'(x)=1\,600\cos x+800=1\,600\left(\cos x+\frac{1}{2}\right)$,

由 $S'(x)=0$,解得 $x=\frac{2\pi}{3}$,

从而当 $0<x<\frac{2\pi}{3}$时,$S'(x)>0$;当$\frac{2\pi}{3}<x<\pi$ 时,$S'(x)<0$,因此 $S(x)$在区间$\left(0,\frac{2\pi}{3}\right)$上单调递增,在区间$\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$上单调递减.

所以当 $x=\frac{2\pi}{3}$时,$S(x)$取得最大值.

故当$\angle AOC=\frac{2\pi}{3}$时,改建后的绿化区域面积 S 最大.

12. 解:(1)因为看台Ⅰ的面积是看台Ⅱ的面积的 3 倍,所以 $AB=\sqrt{3}AC$.

在$\triangle ABC$ 中,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\theta=400\sqrt{3}$,

所以 $AC^2=\frac{800}{\sin\theta}$.

由余弦定理可得

$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\theta$

$=4AC^2-2\sqrt{3}AC^2\cos\theta$

$=(4-2\sqrt{3}\cos\theta)\frac{800}{\sin\theta}$,

即 $BC=\sqrt{(4-2\sqrt{3}\cos\theta)\cdot\frac{800}{\sin\theta}}=40\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}\cos\theta}{\sin\theta}}$.

所以 $BC=40\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}\cos\theta}{\sin\theta}}$，$\theta\in(0,\pi)$.

(2)设表演台的总造价为 W 万元.

因为 $CD=10\text{m}$，表演台每平方米的造价为 0.3 万元，所以 $W=3BC=120\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}\cos\theta}{\sin\theta}}$，$\theta\in(0,\pi)$.

记 $f(\theta)=\frac{2-\sqrt{3}\cos\theta}{\sin\theta}$，$\theta\in(0,\pi)$.

则 $f'(\theta)=\frac{\sqrt{3}-2\cos\theta}{\sin^2\theta}$.

由 $f'(\theta)=0$，解得 $\theta=\frac{\pi}{6}$.

当 $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 时，$f'(\theta)<0$；当 $\theta\in\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$ 时，$f'(\theta)>0$.

故 $f(\theta)$ 在 $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$ 上单调递减，在 $\left(\frac{\pi}{6},\pi\right)$ 上单调递增，

从而当 $\theta=\frac{\pi}{6}$ 时，$f(\theta)$ 取得最小值，最小值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=1$. 所以 $W_{\min}=120$(万元).

答：表演台的最低造价为 120 万元.

阶段检测(一)

1. D　**解析**：因为 $f'(x)=\frac{\frac{x^2}{x}-2x\ln x}{x^4}=\frac{1-2\ln x}{x^3}$，所以 $f'(\mathrm{e})=\frac{1-2\ln \mathrm{e}}{\mathrm{e}^3}=-\frac{1}{\mathrm{e}^3}$.

2. A　**解析**：$f'(x)=1+\mathrm{e}^x$，$k=f'(1)=1+\mathrm{e}$. 因为 $f(1)=1+\mathrm{e}$，所以切线方程为 $y-(1+\mathrm{e})=(1+\mathrm{e})(x-1)$，即 $(1+\mathrm{e})x-y=0$.

3. B　**解析**：$f'(x)=\frac{a}{x}+1$，令 $f'(x)=0$，得 $x=-a$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=-a$ 处取得极值，所以 $a=-1$.

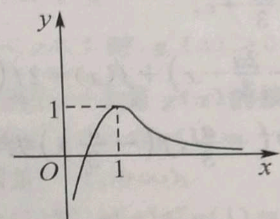
4. B　**解析**：$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$. 令 $f'(x)=0$，得 $x_1=0$，$x_2=2$. 所以 $x\in(-\infty,0)$ 和 $x\in(2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，$x\in(0,1)$ 和 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$，故选 B.

5. D　**解析**：因为 $f'(x)=2x^2\geqslant0$，所以 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上单调递增，故 $x<1-x$，又 $-1<x<1$，$-1<1-x<1$，解得 $0<x<\frac{1}{2}$.

6. A　**解析**：函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且 $f'(x)=6x+\frac{1}{x}-2=\frac{6x^2-2x+1}{x}$. 因为 $x>0$，$g(x)=6x^2-2x+1$ 中 $\Delta=(-2)^2-4\times6\times1=-20<0$，所以 $g(x)>0$ 恒成立，故 $f'(x)>0$ 恒成立，即 $f(x)$ 在定义域上单调递增，无极值点.

7. C　**解析**：由图可知 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 和 $(4,+\infty)$ 上单调递减，在 $(-\infty,0)$ 和 $(2,4)$ 上单调递增，所以 $f(x)$ 在 $x=0$ 时取极大值，$x=2$ 取极小值，故 C 正确.

8. B　**解析**：$f'(x)=\ln x-ax+x\left(\frac{1}{x}-a\right)=\ln x-2ax+1$，函数 $f(x)$ 有两个极值点，即 $\ln x-2ax+1=0$ 有两个不同的根(在正实数集上)，即函数 $g(x)=\frac{\ln x+1}{x}$ 与函数 $y=2a$ 在 $(0,+\infty)$ 上有两个不同交点. 因为 $g'(x)=\frac{-\ln x}{x^2}$，所以 $g(x)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，在 $(1,+\infty)$ 上单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(1)=1$，如图. 若 $g(x)$ 与 $y=2a$ 有两个不同交点，需 $0<2a<1$，即 $0<a<\frac{1}{2}$，故选 B.



9. B　**解析**：设产品单价为 a 元，产品单价的平方与产品件数 x 成反比，即 $a^2x=k$，由题知 $k=250\ 000$，则 $a^2x=250\ 000$，所以 $a=\frac{500}{\sqrt{x}}$. 总利润 $y=500\sqrt{x}-\frac{2}{75}x^3-1\ 200(x>0)$，$y'=\frac{250}{\sqrt{x}}-\frac{2}{25}x^2$. 由 $y'=0$，得 $x=25$，当 $x\in(0,25)$ 时，$y'>0$，$x\in(25,+\infty)$ 时，$y'<0$，所以 $x=25$ 时，y 取最大值.

10. A　**解析**：因为 $y'\Big|_{x=1}=n+1$，所以切线方程为 $y-1=(n+1)(x-1)$，令 $y=0$，得 $x=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$，即 $x_n=\frac{n}{n+1}$. 所以 $\log_{2\,015}x_1+\log_{2\,015}x_2+\cdots+\log_{2\,015}x_{2\,014}=\log_{2\,015}(x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_{2\,014})=\log_{2\,015}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{2\,014}{2\,015}\right)=\log_{2\,015}\frac{1}{2\,015}=-1$.

11. BCD　**解析**：设切点坐标为 (t,t^3-at+a). 由题意知，$f'(x)=3x^2-a$，切线斜率 $k=y'\Big|_{x=t}=3t^2-a$.　①，所以切线方程为 $y-(t^3-at+a)=$

$(3t^2-a)(x-t)$. ②将点 $A(1,0)$ 代入②式得 $-(t^3-at+a)=(3t^2-a)(1-t)$，解得 $t=0$ 或 $t=\frac{3}{2}$，分别将 $t=0$ 和 $t=\frac{3}{2}$ 代入①式，得 $k=-a$ 和 $k=\frac{27}{4}-a$，由题意得它们互为相反数，故 $a=\frac{27}{8}$.

12. ABD **解析**：A. 当 $x\to-\infty$ 时，$y\to-\infty$，当 $x\to+\infty$ 时，$y\to+\infty$，故 $\exists x_0\in\mathbf{R}$，$f(x_0)=0$，故 A 正确；

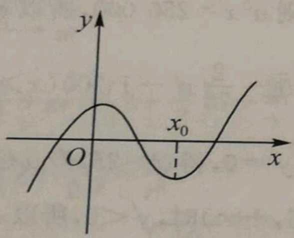
B. 因为 $f\left(-\frac{2a}{3}-x\right)+f(x)=\left(-\frac{2a}{3}-x\right)^3+a\left(-\frac{2a}{3}-x\right)^2+b\left(-\frac{2a}{3}-x\right)+c+x^3+ax^2+bx+c=\frac{4a^3}{27}-\frac{2ab}{3}+2c$，

$f\left(-\frac{a}{3}\right)=\left(-\frac{a}{3}\right)^3+a\left(-\frac{a}{3}\right)^2+b\left(-\frac{a}{3}\right)+c=\frac{2a^3}{27}-\frac{ab}{3}+c$，

所以 $f\left(-\frac{2a}{3}-x\right)+f(x)=2f\left(-\frac{a}{3}\right)$，

所以点 $P\left(-\frac{a}{3},f\left(-\frac{a}{3}\right)\right)$ 为对称中心，故 B 正确；

因为 x_0 是 $f(x)$ 的极小值点，则 $y=f(x)$ 的图象大致如下图所示，则在 $(-\infty,x_0)$ 上不单调，故 C 不正确，D 正确. 而正确的是 ABD.



13. BC **解析**：$f'(x)=3x^2-3a$，令 $f'(x)=0$，得 $x=\pm\sqrt{a}$. 所以 $f(x)$ 在 $(-\infty,-\sqrt{a})$，$(\sqrt{a},+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\sqrt{a},\sqrt{a})$ 上单调递减. 所以 $f(-\sqrt{a})=6$，$f(\sqrt{a})=2$. 所以 $\begin{cases}(-\sqrt{a})^3-3a(-\sqrt{a})+b=6,\\(\sqrt{a})^3-3a\sqrt{a}+b=2,\end{cases}$ 解得 $a=1$，$b=4$. 所以 $f'(x)=3x^2-3$. 所以令 $f'(x)<0$，得 $-1<x<1$. 故符合要求的选项为 BC.

14. $(-\infty,-1]$ **解析**：由题意，方程 $a=x-e^x$ 有解. 设 $g(x)=x-e^x$，则由 $g'(x)=1-e^x=0$，得 $x=0$，所以 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$ 单调递增，$x\in(0,+\infty)$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$ 单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(0)=-1$，所以 $g(x)\leqslant-1$，从而 a 的取值范围是 $(-\infty,-1]$.

15. 2 **解析**：令 $e^x=t$，则 $x=\ln t$，所以 $f(t)=\ln t+t$，所以 $f'(t)=\frac{1}{t}+1$，所以 $f'(1)=2$.

16. $(1,1)$ **解析**：曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线斜率 $k=y'=e^x\Big|_{x=0}=1$；由 $y=\frac{1}{x}$，可得 $y'=-\frac{1}{x^2}$，因为曲线 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 在点 P 处的切线与曲线 $y=e^x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线垂直，所以 $-\frac{1}{x_P^2}=-1$. 解得 $x_P=1$. 由 $y=\frac{1}{x}$，得 $y_P=1$，故所求点 P 的坐标为 $(1,1)$.

17. $(-1,0)\cup(1,2)$ **解析**：不妨设 $f(x)=2e^{2x}-1$，满足 $f(0)=1$ 且 $f'(x)-2f(x)=2$，$f(\ln2)=2e^{2\ln2}-1=7$.

又 $f(x)=2e^{2x}-1$，$x\in\mathbf{R}$，则 $f'(x)=4e^{2x}>0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调增函数；所以不等式 $f(\ln(x^2-x))<7$ 等价于 $\ln(x^2-x)<\ln2$，可得即 $\begin{cases}x^2-x>0,\\x^2-x<2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x>1\text{ 或 }x<0,\\-1<x<2,\end{cases}$ 即 $-1<x<0$ 或 $1<x<2$. 所以该不等式的解集为 $(-1,0)\cup(1,2)$.

18. **解**：(1) $f'(x)=3x^2+2ax+b$，

由题意 $\begin{cases}f'\left(-\frac{2}{3}\right)=0,\\f'(1)=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}\frac{4}{3}-\frac{4a}{3}+b=0,\\3+2a+b=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=-2,\end{cases}$ 经检验符合题意，所以 $f(x)=x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$.

(2) 由 (1) 知 $f'(x)=3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)$，令 $f'(x)=0$，得 $x_1=-\frac{2}{3}$，$x_2=1$，

当 x 变化时，$f'(x)$，$f(x)$ 的变化情况如下表：

x	-2	$\left(-2,-\frac{2}{3}\right)$	$-\frac{2}{3}$	$\left(-\frac{2}{3},1\right)$	1	$(1,2)$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-6	↗	极大值 $\frac{22}{27}$	↘	极小值 $-\frac{3}{2}$	↗	2

由上表知 $f(x)_{\max}=f(2)=2$，$f(x)_{\min}=f(-2)=-6$.

19. **解**：(1) 因为 $f(x)=ax^3+bx^2$ 的图象经过点 $M(1,4)$，所以 $a+b=4$. ①

$f'(x)=3ax^2+2bx$，则 $f'(1)=3a+2b$.

由已知得 $f'(1)\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)=-1$，即 $3a+2b=9$. ②

由①②，得 $a=1,b=3$.

(2) $f(x)=x^3+3x^2$，$f'(x)=3x^2+6x$，

令 $f'(x)=3x^2+6x\geqslant 0$，得 $x\geqslant 0$ 或 $x\leqslant -2$，

故由 $f(x)$ 在 $[m,m+1]$ 上单调递增，得 $[m,m+1]\subseteq[0,+\infty)$ 或 $[m,m+1]\subseteq(-\infty,-2]$，

所以 $m\geqslant 0$ 或 $m+1\leqslant -2$，即 $m\geqslant 0$ 或 $m\leqslant -3$.

所以 m 的取值范围为 $(-\infty,-3]\cup[0,+\infty)$.

20. 解：(1) $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数；

当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数.

(2)依题意得，不等式 $a<\ln x+\dfrac{1}{x}$ 对于 $x>0$ 恒成立.

令 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$.

当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$g'(x)=\dfrac{1}{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)>0$，

则 $g(x)$ 是 $(1,+\infty)$ 上的增函数；

当 $x\in(0,1)$ 时，$g'(x)<0$，则 $g(x)$ 是 $(0,1)$ 上的减函数.

所以 $g(x)$ 的最小值是 $g(1)=1$，从而 a 的取值范围是 $(-\infty,1)$.

21. 解：(1)因为 $x>0$，所以 $f'(x)=\dfrac{1}{x}+x-2\geqslant 0$，

所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增. 又 $f(1)=-\dfrac{3}{2}<0$，$f(10)=\ln 10+30>0$，所以 $f(x)$ 有唯一零点.

(2) $g'(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2a\left(\dfrac{1}{x}+x-2\right)-2$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2a\left(x+\dfrac{1}{x}\right)+4a-4$

$=\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right)\left(x+\dfrac{1}{x}+2-2a\right)$.

由题意，$x>0$ 时，$g'(x)\geqslant 0$，因为 $x+\dfrac{1}{x}-2\geqslant 0$，

所以 $x+\dfrac{1}{x}+2-2a\geqslant 0$，即 $2a\leqslant x+\dfrac{1}{x}+2$ 在 $x\in(0,+\infty)$ 上恒成立.

因为 $x+\dfrac{1}{x}+2\geqslant 4$，所以 $2a\leqslant 4$，即 $a\leqslant 2$，

所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty,2]$.

22. 解：(1)因为 $\begin{cases}a\times 10^2+\dfrac{101}{50}\times 10-b\ln 1=19.2,\\ a\times 20^2+\dfrac{101}{50}\times 20-b\ln 2=35.7,\end{cases}$

解得 $a=-\dfrac{1}{100}$，$b=1$，

所以 $f(x)=-\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{101}{50}x-\ln\dfrac{x}{10}(x\geqslant 10)$.

(2)由 $T(x)=f(x)-x=-\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{51}{50}x-\ln\dfrac{x}{10}$ $(x\geqslant 10)$，得 $T'(x)=-\dfrac{x}{50}+\dfrac{51}{50}-\dfrac{1}{x}=-\dfrac{(x-1)(x-50)}{50x}(x\geqslant 10)$.

令 $T'(x)=0$，得 $x=1$(舍去)或 $x=50$.

当 $x\in(10,50)$ 时，$T'(x)>0$，因此 $T(x)$ 在 $(10,50)$ 上是增函数；当 $x\in(50,+\infty)$ 时，$T'(x)<0$，因此 $T(x)$ 在 $(50,+\infty)$ 上是减函数，所以 $x=50$ 为 $T(x)$ 的极大值点.

即该景点改造升级后旅游利润 $T(x)$ 的最大值为 $T(50)=24.4$(万元).

23. (1) **解**：$f'(x)=\dfrac{x+1}{x}+\ln x-1=\ln x+\dfrac{1}{x}$，

$xf'(x)=x\ln x+1$，而 $xf'(x)\leqslant x^2+ax+1$ 等价于 $\ln x-x\leqslant a$. 令 $g(x)=\ln x-x$，则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-1$，当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$，所以 $x=1$ 是 $g(x)$ 的极大值点，也是最大值点，所以 $g(x)\leqslant g(1)=-1$. 综上可知，a 的取值范围是 $[-1,+\infty)$.

(2) **证明**：由(1)知，$g(x)\leqslant g(1)=-1$，即 $\ln x-x+1\leqslant 0$. 当 $0<x<1$ 时，$f(x)=(x+1)\ln x-x+1=x\ln x+(\ln x-x+1)\leqslant 0$，$x-1<0$，所以 $(x-1)f(x)\geqslant 0$；当 $x\geqslant 1$ 时，$f(x)=\ln x+(x\ln x-x+1)=\ln x+x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}-1\right)=\ln x-x\left(\ln\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x}+1\right)\geqslant 0$，$x-1>0$，所以 $(x-1)f(x)\geqslant 0$，综上所述当 $x>0$ 时，$(x-1)f(x)\geqslant 0$.

第 3 章　数系的扩充与复数的引入

3.1　数系的扩充

1. C　**解析**：因为 $\mathrm{i}^2=-1$，$\mathrm{i}^3=-\mathrm{i}$，$\mathrm{i}^4=1$，所以 $A=\{\mathrm{i},-1,-\mathrm{i},1\}$，又 $B=\{1,-1\}$，故 $A\cap B=\{1,-1\}$.

2. C　**解析**：令 $\begin{cases}a^2=2,\\ -2+b=3,\end{cases}$ 得 $a=\pm\sqrt{2}$，$b=5$.

3. A　**解析**：因为复数 $(1-\sqrt{2})\mathrm{i}=0+(1-\sqrt{2})\mathrm{i}$，所以实部为 0.

4. A　**解析**：设所求新复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R})$，由题意知：复数 $-\sqrt{5}+2\mathrm{i}$ 的虚部为 2，即 $a=2$；复数 $\sqrt{5}\mathrm{i}+2\mathrm{i}^2=\sqrt{5}\mathrm{i}+2\times(-1)=-2+\sqrt{5}\mathrm{i}$ 的实部为 -2，即 $b=-2$，则所求的 $z=2-2\mathrm{i}$. 故选 A.