

架设沟通数学史与数学教育的桥梁^①

——基于 HPM-2016 的文献分析

邹佳晨¹ 沈中字² 汪晓勤^{1②}

(1. 华东师范大学教师教育学院 200062; 2. 华东师范大学数学科学学院 200241)

通过对最近的一届的国际数学史与数学教育会议(简称 HPM-2016)学术报告的分析表明,国际数学史与数学教育(HPM)领域的研究取得了以下五个方面的新进展:在实践研究上,建立了可操作的途径和方法;在教师专业发展的研究上,研究对象由教师扩展到教师专业发展指导者;在数学文化方面,出现了一系列跨文化的研究;在教育取向的数学史研究方面,趣味数学进入了研究者的视野;在理论探讨上,构建了基于数学史的问题提出的框架.基于这些新进展,在我国 HPM 学术研究、数学课程修订与教学评价、教师培训等方面得到了若干启示.

从 19 世纪中叶开始,数学史与数学教育之关系就已受到了人们的关注,英国数学家德摩根(A. De Morgan, 1806~1871)、美国数学史家卡约黎(F. Cajori, 1859~1930)、史密斯(D. E. Smith, 1860~1944)等对数学史在数学教育中的价值都有较为深刻的认识.1972年,在第二届国际数学教育大会上,数学史与数学教学之关系国际研究小组(International Study Group on the Relations Between the History & Pedagogy of Mathematics, 简称 HPM)成立,标志着数学史与数学教育(也简称 HPM)这一学术领域的诞生^[1].HPM 即表示国际数学史与数学教育研究小组,也表示一个学术领域.经过 40 年的发展,该领域成果丰硕,《数学教育研究》(Educational Studies in Mathematics)^[2]、《科学与教育》(Science & Education)^[3]等数学教育领域的国际重

要期刊都相继出版 HPM 专辑.从 1984 年开始,历届国际数学教育大会均举办相应的 HPM 卫星会议,至今已有 9 届,最近的一届为 HPM-2016,在法国南部城市蒙彼利埃举行.

中国大陆学术界直到 2005 年才真正开始关注这一领域^[1],全国数学史学会举办“数学史与数学教育国际研讨会”,每隔两年举办一次,已经举办 7 届.十余年来,HPM 的研究文献(包括研究生学位论文)逐年增多,但大多数研究仍聚焦于数学史教育价值的探讨,虽然也有一些实证和实践研究,但研究方法尚不成熟,课题也比较单一.因此,我们有必要了解国际 HPM 研究的新进展,把握未来的研究方向,为当前中国的 HPM 研究提供思想启迪.

HPM-2016 是国际上该领域最高级别的会议,会议主题包括:(1)将数学史融入数学教育的理论和概念框架;(2)数学教育中学生及教师的历史和认识论:班级实验和教学材料;(3)课程中的原始素材及其教育影响;(4)数学与科学、技术以及艺术之间的关系:历史问题及跨学科的教与学;(5)数学和文化;(6)有关数学教育史的主题;(7)地中海国家的数学.会议共提交 85 个报告,其中英语报告 70 个,法语报告 15 个,报告的类型分为:大会报告(9 个),讨论组(3 个),专题讨论(2 个),口头报告(45 个),工作坊(15 个),海报(9 份)和展览(2 个).本文选取 HPM-2016 的报告进行研究分析,试图回答以下问题:国际 HPM 研究有哪些新进展?对中国 HPM 研究有何启示?

① 本文系上海高校“立德树人”人文社会科学重点研究基地之数学教育教学研究基地研究项目“数学课程与教学中落实立德树人根本任务的研究”系列论文之一.

② 本文通讯作者.

1 会议内容概述

为了更清晰地展现当前国际 HPM 研究的现状,我们将本次会议的 85 个报告重新分为以下 6 类,与已有的研究框架相吻合^[4],这 6 类涵盖了会议的所有报告,且每个报告均属于其中一类。

第一类:HPM 理论探讨(对应主题 1,9 个报告,占 10.6%)

第二类:教育取向的数学史研究(对应主题 3、主题 4、主题 5,32 个报告,占 37.7%)

第三类:教学实践与案例开发(对应主题 2、主题 3,22 个报告,占 25.9%)

第四类:HPM 与教师专业发展(对应主题 2、主题 3,8 个报告,占 9.4%)

第五类:数学教育史研究(对应主题 6,9 个报告,占 10.6%)

第六类:地中海国家的数学(对应主题 7,5 个报告,占 5.8%)

由此可见,有关教育取向的数学史研究和教学实践与案例开发的报告较多,占比达 63.6%。下面我们每类中的典型报告为例,分析国际 HPM 研究的现状。

HPM 理论探讨主要解决“为何”与“如何”的问题,对 HPM 教学实践具有指导意义。这一主题在 HPM 的早期历史上颇为流行,但主要停留在思辨层面上。如今,随着 HPM 研究的深入,HPM 理论探讨已经与教学实践相结合,建立在科学研究方法的基础之上。HPM 理论研究在欧美的探讨已经较为深刻,形成了一些常用的理论框架,以色列本古里安大学的 Fried、加拿大渥太华大学的 Guillemette 和德国杜伊斯堡大学的 Jahnke 三人围绕着数学史融入数学教学的理论框架的构建展开讨论。从诠释学和生活经验两个角度将当前的 HPM 理论分为两类,即分别从心理层面和社会文化层面分析数学史对数学教育的价值^[5]。对于数学史的应用方式,研究者结合“任务设计”以及“问题提出”等方面展开了深入的研究。

教育取向的数学史研究是以服务教育为目的,针对数学课程中涉及的概念、公式、定理、问题的历史所进行的文献研究。这类研究是 HPM 领域的重要特色,为数学史在教学中的运用提供了丰富的素材。本次会议的报告中,教育取向的数学史研究数量最多且种类丰富,可以分为历史发展

研究(12 个)、数学与文化(4 个)、数学与娱乐(3 个)、数学与艺术(3 个)、数学与技术(7 个)、数学人物(3 个),其中以历史发展研究居多。如法国数学教育研究所(IREM)的 Keller 通过两个工作坊分别对史前的几何和算术进行了研究。几何方面,考察了旧石器时代、洞穴和装饰物艺术中的几何^[6];算术方面,分析了从一到多、量的概念以及数系之间的关系,对原始社会中数字的产生进行了考察^[7]。从这类报告中可以看出,国际上对于教育取向的数学史研究的理解非常多元,呈现出跨学科的特点,同时也关注发掘本土文化的特色。

教学实践与课例开发是指将数学史融入数学教学的实践研究,旨在通过促进知识理解、增加学习兴趣等来改善数学教学。意大利数学教育实验室的 Longoni 等人针对学生学习分数概念的困难,通过探究历史上分数概念的起源,对小学三年级实施了分数教学实验,以此促进学生对分数的理解^[8]。台湾勤益科技大学的刘柏宏则将数学小说运用于数学教学,以此来改善学生的数学信念^[9]。从这类报告中可以看出,研究者十分关注数学史自身的价值,同时,由于国情、学情、课程目标的差异,不同国家的教学实践有着不同的特色。

HPM 与教师专业发展之间的关系是 HPM 的重要研究课题之一。美国佛罗里达州立大学的 Clark 和德国吉森大学的 Schorcht 主持的讨论组就在教师教育中为什么要使用数学史、有哪些困难、对教师有何价值、如何开展相关活动等主题进行了热烈的讨论^[10]。HPM 与教师专业发展的研究虽然起步较晚,理论基础相对匮乏,但已有学者在这方面进行了深入的研究。

数学教育史的研究主要关注某一阶段、某个国家或地区的数学教育发展历程,包括历史上数学家与数学教育家的教育思想和该国或该地区的数学教育发展情况。如荷兰代尔夫特理工大学的 Smid 考察了著名数学家和数学教育家弗赖登塔尔(H. Freudenthal, 1905—1990)的早年经历,并分析了其对弗赖登塔尔之后数学教育思想的影响^[11]。冰岛大学的 Bjarnadottir 通过冰岛大学入学考试试题的变化探讨了新数运动对冰岛数学教育的影响^[12]。

地中海国家的数学史是本次会议的专题。法国里尔大学的 Djebbar 追溯了地中海地区的数学

发展史,考察了该地区与周边地区的数学传播与交流^[13].会议还安排了地中海地区数学成就的主题展览.

2 HPM 研究新进展

通过对 HPM-2016 的报告进行分析,可以发现国际 HPM 研究的一些新进展.

2.1 新方法:从理论到实践

随着研究的深入,研究者渐渐开始从“为何”使用数学史转向到了“如何”在课堂中使用数学史,从而切实地改善数学教学,在此基础上,HPM 视角下的教学实践和案例开发渐渐增多.本次会议中,来自法国、中国大陆和台湾的研究者的报告呈现出丰富的实践特色,提供了新的实践维度.

法国巴黎狄德罗大学的 Chorlay 的报告介绍了两个 HPM 教学案例:一是将德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz, 1646~1716)的一封关于概率计算的信函,用于中学生概率论起始课教学;二是将起源于印度、十五世纪流行于欧洲的多位正整数相乘的格子算法,用于小学高年级学生的乘法教学.两个案例的教学过程均由以下四个步骤构成:呈现史料、学生探究、课堂交流、古今对比.通过学生的反馈,得出数学史融入数学课堂的教育价值^[14].

中国大陆的 HPM 研究团队在本次会议上以工作坊的形式展示了三个 HPM 教学案例.案例“三角形内角和”引导初中生沿着历史上数学家的足迹去发现并证明三角形内角和定理;案例“函数的概念”借鉴函数概念的历史演进过程,以问题串引导学生经历函数定义的发展历程,促进学生对高中函数新定义的理解;案例“棱柱的概念”则通过让学生给棱柱下定义并对其进行辨析和改进,从而让学生经历棱柱定义从不完善到完善的过程,学生在理解棱柱概念时显示出惊人的历史相似性.三个案例呈现了中国大陆 HPM 案例开发的策略和特点^[15].

中国台湾的苏意雯、英家铭、黄俊玮和陈玉芬以数学叙事的形式,分别在大学、高中和初中三个学段开展了融入数学史的教学实践研究.这里的数学叙事是指通过叙事的方式交流与建构数学意义或理解.大学案例围绕海伦公式展开,高中案例围绕欧拉公式展开,初中案例则围绕数学文化活动展开.诸案例的教学过程包括呈现原始文献、展

开数学交流、构建数学思想等环节,最后,研究者通过学生的反馈信息,得出数学史融入数学教学的价值^[16].

数学史融入数学教学的实践探索是 HPM 研究领域最受关注的课题.虽然文化差异导致 HPM 教学策略、价值取向的不同,但这些实践研究都丰富和拓展了 HPM 的研究方法.

2.2 新方向:教师教育者的专业发展

HPM 与教师专业发展是关于数学史对数学教师专业发展影响的研究,是 HPM 的重要研究课题之一^[17].该主题的研究起步较晚,主要探讨职前与在职数学教师的专业发展.从教师专业发展的角度,美国数学教育家 Ball 提出了面向教学的数学知识(Mathematical Knowledge for Teaching,简称 MKT)理论,其中指出数学教师所需要的知识由六部分组成,即一般内容知识(CCK)、水平内容知识(HCK)、专门内容知识(SCK)、内容与学生知识(KCS)、内容与教学知识(KCT)和内容与课程知识(KCC).那么,培训教师的教师教育者需要什么知识?Zopf^[18]和 Kim^[19]在 MKT 理论的基础上开始研究面向教师教育的数学知识(Mathematical Knowledge for Teaching Teachers,简称 MKTT),即教师教育者所需要的知识.他们认为,MKTT 中包含 MKT 中的特殊知识,以及数学学科本身的知识,其中数学学科本身的知识包含“数学定义、性质、定理等数学结构方面的知识”,还包含“对学科知识本质的理解,包括学科知识的来源、演进和创立”.

此次会议中,丹麦奥胡斯大学的 Jankvist 关注数学史与教师教育者所需要的知识之间的联系,强调数学史在教师教育者培训中的重要性,拓展了 HPM 与教师专业发展之间关系的研究方向.

为了揭示数学史与 MKTT 之间的关系,Jankvist 在丹麦奥胡斯大学进行实验,在四名教师教育者的培训课程中加入数学史的内容,进而对数学史知识对他们 MKTT 的影响进行了考察.实施培训课程后发现,学员们在 MKTT 的两部分知识上都得到了增强,一方面,通过对数学史的学习,学员重温以前学过但已遗忘的数学知识,另一方面,通过考虑数学史在教与学方面的融入,MKT 知识也得到了增强,从学生所完成的作业

可见, MKT 中的水平内容知识(HCK)和内容与教学知识(KCT)与 MKTT 之间的联系最为密切^[20].

从本报告可见, 数学史在数学教师教育者的培训、发展他们的 MKTT 方面有着重要的作用, 这是一个值得研究的新方向.

2.3 新视角: 跨文化的研究

HPM 本身就横跨了历史与教育两大学科, 随着研究的发展, HPM 中所具有的跨文化特点日益明显, 这已成为 HPM 在史料挖掘和教学实践上的重要发展趋势. 本次会议的报告为我们带来了跨学科、跨民族和跨地域的新视角.

从跨学科的角度, 希腊克里特大学的 Tzanakis 从数学和物理两门学科的本质、历史发展、认识论基础三方面揭示了两者之间的深刻联系. 在此基础上, 通过历史上地球周长的测量等例子说明如何将数学史或物理学史融入这两门学科的教学, 以促进学生的学习^[21]. 巴西圣保罗大学的 Abdounur 对西方历史上数学与音乐理论之间的联系进行了探讨^[22], 英国巴斯思巴大学的 Ranson 对牛顿(I. Newton, 1643~1727)的数学贡献进行了展示, 其中采用英国诗人、画家布莱克(W. Blake, 1757~1821)的牛顿画像作为教学的材料^[23].

从跨民族的角度, 此次会议的报告更重视本国不同民族的数学文化的挖掘, 在 HPM 与民族文化之间建立深刻的联系. 如秘鲁卡耶塔诺迪亚大学的 Bonilla^[24]的报告首先提到, 秘鲁是一个多语言、多文化的国家, 因此形成了一个多语言多文化的教育系统, 在此背景下, 学生的成绩并不理想, 而教学脱离民族文化的背景是其原因之一. 因此, Bonilla 在教学中融入本土民族的文化元素(包括一些古代的数字系统), 并尝试用动态几何软件绘制带有民族元素的几何图案. 实验结果表明, 学生的算术与几何成绩有了一定的提升, 更重要的是, 增强了学生的自信心.

从跨地域的角度, 中国香港大学的萧文强追溯了明清之际中西数学交流的三次高潮: 第一次为徐光启(1562~1633)和利玛窦(M. Ricci, 1552~1610)翻译《几何原本》(前六卷), 第二次为康熙皇帝学习西方数学文化, 第三次为李善兰(1811~1882)和伟烈亚力(A. Wylie, 1815~

1887)等翻译西方微积分、解析几何等著作. 最后, 报告引用明代数学家李之藻(1565~1630)在利玛窦所编《天主实义》重印版序言中的“东海西海, 心同理同. 所不同者, 特言语文字之际”作为总结^[25].

2.4 新素材: 趣味数学作为课堂素材

教育取向的数学史研究是 HPM 研究的基础, 没有历史研究, HPM 实践研究就成了无米之炊. 本次会议的若干报告对数学史上的趣味数学著作进行深入研究, 为 HPM 实践提供了新的素材.

法国南特大学的 Barbin 和法国狄德罗大学的 Guitart 对 19 世纪法国数学中兴起的趣味数学热进行研究. 他们分别选取法国数学家卢卡斯(É. Lucas, 1842~1891)、富雷(É. Fourrey, 1869~?)和莱桑(C. -A. Laisant, 1841~1920)的有关著作, 从历史、教学和数学三个维度对其中的趣味数学问题进行分析, 并指出这三个维度不可分割. 例如, 卢卡斯在其《趣味算术》中运用几何方法来解决古代遗产分配问题, 实现算术与代数问题解法的可视化^[26]. 可见这些趣味数学问题不仅仅供人消遣, 而是富有思想启迪, 具有重要的教育价值.

2.5 新框架: 基于数学史的问题提出

迄今为止, HPM 的理论探讨主要涉及“为何”与“如何”问题, 欧美学者已提出一系列较为成熟的框架. 来自中国大陆的汪晓勤则首次将 HPM 与问题提出结合起来, 构建了基于数学史的问题提出(History Based Problem Posing, 简称 HBPP)框架.

数学史融入数学教学的方式可分成附加式、复制式、顺应式和重构式四种, 其中复制式是直接采用历史上的数学问题, 顺应式是基于历史材料或历史上数学问题对其进行改编, 重构式是基于历史顺序、心理顺序和逻辑顺序进行教学, 在教学中表现为设置一系列由易至难、环环相扣的数学问题. 因此, 基于数学史的问题提出在 HPM 教学实践中不可或缺.

美国学者 Silver 等人的研究表明, 根据已知问题提出新问题的具体策略有四种: 条件操作(改变已知条件)、目标操作(改变问题的目标)、对称性(将已知条件和目标互换)、链接(对现有问题进

行扩充,新问题的解决依赖于已有问题的解决)^[27].结合数学史融入数学教学的方式,汪晓勤将基于数学史料的问题提出策略分成七种:再现式、自由式、情境式、条件式、结论式、对称式、链接式.

“再现式”策略就是直接采用数学史上“原汁原味”的问题,对应的数学史运用方式是复制式,即数学史料本身是数学问题.“自由式”策略是根据一则数学史料(如历史上的数学故事、数学方法等)来提出数学问题,问题的条件和结论可根据教学需要自由选择.“情境式”策略是对历史上数学问题的情境进行改编、或增加符合学生生活经验的情境,而保持已知条件和所求项不变,对历史上数学问题的条件和结论进行改编来提出新问题,分别为“条件式”策略和“结论式”策略.将历史上数学问题中的条件和结论进行互换,从而提出新的问题,这种策略称为“对称式”.将历史上数学问题的结论作为新的条件来提出问题,这种策略称为“链接式”.这些方式对应的数学史运用方式是顺应式和重构式.

3 若干启示

从国际 HPM 研究的新进展中可以发现,HPM 这一学术领域目前已进入蓬勃发展时期,在理论探索、研究方法、研究框架等方面有一定的突破,为教育教学研究和实践提供了丰富的视角和素材,可以说,HPM 为沟通历史与教育两大学科架设了一座桥梁.同时,我们得到了一些对中国 HPM 研究的启示.

3.1 加强教育取向的历史研究

教育取向的数学史研究是 HPM 研究的基础,尽管国内 HPM 文献很多,但在此方面的研究相对较少,本次会议中教育取向的历史研究十分丰富,如十九世纪法国的趣味数学著作.此外,本次会议还关注到一些跨学科,跨民族的历史素材,如布莱克绘画中的数学,数学与物理、数学与音乐之间的联系,带有民族特色的几何图案等.

HPM 研究需要扩大教育取向的历史研究,这就要求数学史的学者能够多做教育取向的历史研究,HPM 研究者能进行原始文本的历史研究,而不是仅仅依赖于二手文献.美国数学家洛维特(E. O. Lovett, 1871~1957)说过:“二手思想就像二手书本和二手衣服一样充满细菌.”^[28]本次

会议上,国际 HPM 主席、加拿大劳伦森大学的 Radford 的报告亦为原始文献的研究,充分说明了 HPM 领域对于原始文献的重视^[29].

另一方面,我们从原始材料中可以获得丰富的教学素材.目前,国内关于西方早期教科书的研究,取得了一定的成果,但在进行 HPM 实践时仍时常出现“巧妇难为无米之炊”的现象,因此需要继续此方面的研究.

3.2 数学史融入数学课程与教学评价

教育部 2017 年高考内容修订意见提出:要充分发挥高考命题的育人功能和积极导向作用,增加中华优秀传统文化的考核内容,并要求在数学中增加数学文化内容.因此,数学史融入高考命题受到人们的极大关注.然而,对近十年来的高考试题的分析可以发现,基于数学史材料的高考命题策略非常单一,所用史料也十分有限.本次会议中 HBPP 框架的提出,对于丰富和完善高考数学命题,乃至中小学数学训练系统,有着很好的指导意义;同时,教育取向的数学史研究成果也可以为高考命题提供更丰富的材料.

3.3 数学史与数学核心素养

目前国内数学核心素养的研究方兴未艾,如何正确理解数学核心素养^[30-31],并在数学课程中落实核心素养^[32],得到越来越多学者的关注^[33].而 HPM 实践研究表明,数学史融入数学教学对改善学生的情感和信念有着显著的促进作用,因此,HPM 研究可以为完善我国数学核心素养的结构提供有力参考.数学史与数学核心素养的关系之研究,亦是未来 HPM 研究的重要课题之一.

3.4 HPM 与数学教师培训

尽管 HPM 受到国内学术界的广泛关注,但是 HPM 对于国内大多数数学教师专业发展指导者来说还是一个陌生的领域.本次会议的相关报告显示,HPM 对教师专业发展指导者具有积极的作用,而教师专业发展指导者往往对教师的专业发展以及教育教学的改革作用巨大,因此,有必要加强对教师专业发展指导者的 HPM 培训.MKTT 理论与 HPM 之间的联系,可以为这方面的研究与实践提供重要借鉴.

参考文献

- [1] 汪晓勤. HPM: 数学史与数学教育[M]. 北京: 科学出版社, 2017: 16-17
- [2] Radford, L., Furinghetti, F., Katz, V. Introduction The topos of meaning or the encounter between past and present [J]. *Educational Studies in Mathematics*, 2007, 66(2):107-110
- [3] Katz, V., et al. Special Issue on History and Philosophy of Mathematics in Mathematics Education [J]. *Science & Education*, 2014, 23(1):1-6
- [4] 汪晓勤. HPM 的若干研究与展望 [J]. 中学数学月刊, 2012 (2):1-5
- [5] Fried, M, Guillemette, D, Jahnke, H. Theoretical and/or conceptual frameworks for integrating history in mathematics education [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [6] Keller, O. Space, structuring, figure: A prehistoric legacy [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [7] Keller, O. The Invention of number [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [8] Longoni, P., et al. the "originary" core of the concept of fraction [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [9] Liu, B. H. Using mathematical fictions as a means for revealing students' implicit beliefs of mathematics [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [10] Clark, K, Schorcht, S. History of mathematics in teachers' education [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [11] Smid, H. Formative years: Hans Freudenthal in prewar Amsterdam [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [12] Bjarnadottir. New - math influences in Iceland. Selective entrance examinations into High Schools [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [13] Djebbar. Les mathématiques dans l'espace méditerranéen; l'exemple d'al-Andalus et du Maghreb [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [14] Chorlay, R. Historical sources in the classroom and their educational effects [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [15] Zou, J., et al. Integrating the history of mathematics into teaching: Cases from China [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [16] Su, Y. W., et al. Mathematical narrative: from history to literature [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [17] 岳增成, 汪晓勤. HPM 案例驱动下的小学数学教师专业发展——以“角的初步认识”为例 [J]. 基础教育, 2017 (2): 96-112
- [18] Zopf, D. Mathematical Knowledge for Teaching Teachers: The Mathematical Work of and Knowledge Entailed by Teacher Education (Unpublished doctoral dissertation) [D]. *Ann Arbor: University of Michigan*, 2010
- [19] Kim, Y. Teaching Mathematical Knowledge for Teaching: Curriculum and Challenges (Unpublished doctoral dissertation) [D]. *Ann Arbor: University of Michigan*, 2013
- [20] Jankvist, U., Mosvold, R., Clark, K. Mathematical knowledge for teaching teachers; The case of history in mathematics education [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [21] Tzanakis, C. Mathematics & physics; an innermost relationship. Didactical implications for their teaching & learning [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [22] Abdounur, O. The emergence of the idea of irrationality in theoretical music contexts in the Renaissance [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [23] Ransom, P. Isaac Newton: contains awe [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [24] Bonilla. Articulation of mathematical notions with Quechua notions across history of mathematics and dynamic geometry [A]. *Proceedings of the 2016* (下转第 40 页)

所蕴含的核心素养的水平级数.对于非压轴题,可以考虑综合少数核心素养并将水平级数控制在二级以内,而对于压轴题,可以提高其综合性,一道试题蕴含多个核心素养且适当提高核心素养的水平.

(2)理解核心素养内涵,丰富核心素养的操作性定义

核心素养是抽象的概念,很多专家学者都在研究其内涵,试图提出其更具操作性的定义.喻平基于知识理解,知识迁移以及知识创新层面对核心素养进行三级水平划分;彭艳贵等人从宏观和微观两个维度描述核心素养的内涵^[5].万变不离其宗,不论何种操作性定义,都应当回归核心素养本质.厘清目前已有文献对核心素养的研究,作为借鉴,在其基础上探索、丰富,明确理论与实践相结合的理念,以核心素养的内涵以及核心素养提出的目的为根本出发点,制定有效的试题,分析现实中普遍学生核心素养的测评情况,以此在实践中修正并丰富核心素养的操作性定义,如此循环,不断完善,才能逐步提高核心素养测评体系的质量.

(3)分析试题欠缺之处,加强核心素养测评体系的实践性

在核心素养成为趋势的大环境下,根据核心素养合理命制试题愈发重要.根据数学关键能力

评价指标框架进行分析试卷试题,可以发现试卷的欠缺之处.以2019年高考数学全国卷I为例,可以看出其蕴含的逻辑推理、数学运算、数学建模以及直观想象这四大核心素养居多,而数学抽象和数据分析这两大核心素养涉及较少,这不利于学生的学习能力全面发展.加强对大规模教育考试的评价有利于提高考试的科学性,而试题难度以及区分度对提高考试的质量没有实质性的帮助^[3].考试不应被认为只是评估、诊断或人才选拔的工具,它也应是核心素养测评体系的重要实践.作为教研人员,在分析学生考试情况时,不应看重学生分数的高低,而应更注重学生的核心素养发展情况.对学生的核心素养发展情况的分析,不仅可以作为修正核心素养测评体系的指标,也可以丰富核心素养融入试卷的实践经验.

参考文献

- [1]喻平. 数学学科核心素养评价的一个框架[J]. 数学教育学报, 2017, 26(2): 19-23+59
- [2]鲍建生. 中英两国初中数学期望课程综合难度的比较[J]. 全球教育展望, 2002, 31(9): 48-52
- [3]雷新勇. 大规模教育考试科学属性之理论和实践思考[J]. 教育与考试, 2007(1): 31-37
- [4]喻平. 基于核心素养的高中数学课程目标与学业评价[J]. 课程·教材·教法, 2018, 38(1): 80-85
- [5]彭艳贵, 徐斌. 高中生数学学科核心素养测评框架的理论分析[J]. 教育理论与实践, 2019, 39(23): 49-52
- (上接第19页)
- ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics, 2016
- [25] Siu, M. K. The confluence of the Yellow River and the Mediterranean [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [26] Barbin, E, Rogers, L. Geometry in the secondary school curriculum and in progression to university [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [27] Silver, E. A., Mamona-Downs, J., Leung, S. S., & Kenney, P. A. Posing mathematical problems: An exploratory study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1996, 27(3), 293-309
- [28] Miller, G. A. *Historical Introduction to Mathematical Literature*. New York: The Macmillan Company, 1927: 38-39
- [29] Radford, L. Father Padilla's *Arithmetica practica* (1732) in its cultural colonial Guatemalan context [A]. *Proceedings of the 2016 ICME Satellite Meeting of the International Study Group on the Relations Between the History and Pedagogy of Mathematics*, 2016
- [30] 李尚志. 核心素养渗透数学课程教学[J]. 数学通报, 2018(1): 1-6
- [31] 李尚志. 核心素养渗透数学课程教学(续)[J]. 数学通报, 2018(2): 1-5
- [32] 章建跃. 树立课程意识 落实核心素养[J]. 数学通报, 2016(5): 1-4
- [33] 郭玉峰. 基于核心素养的国际数学课程教材改革动向及启示[J]. 数学通报, 2019(6): 9-14