

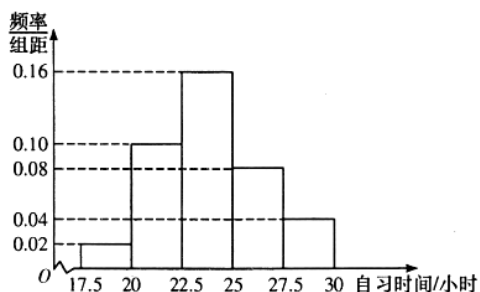
华罗庚中学、江都中学和仪征中学 12 月联考试卷

高二数学

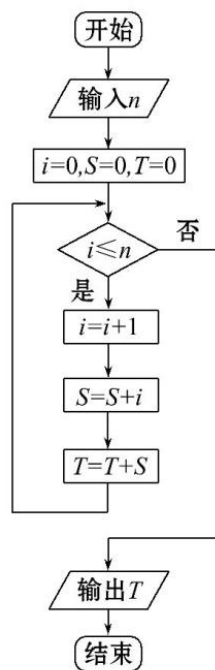
分值：160 分，时间：120 分钟

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，共 70 分. 请把答案填写在答题卡相应的位置上.

- 命题 “ $\forall x \in [0, +\infty)$, $x^3 + x \geq 0$ ” 的否定是 ▲.
- 平行于直线 $2x + y + 1 = 0$ 且与圆 $x^2 + y^2 = 5$ 相切的直线的方程是 ▲.
- 若抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$ 的准线经过双曲线 $x^2 - y^2 = 1$ 的一个焦点, 则 $p =$ ▲.
- 若 “ $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $\tan x \leq m$ ” 是真命题, 则实数 m 的最小值为 ▲.
- 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 一元二次方程 $x^2 - 4x + n = 0$ 有正整数根的充要条件是 $n =$ ▲.
- 某高校调查了 200 名学生每周的自习时间(单位: 小时), 制成了如图所示的频率分布直方图, 其中自习时间的范围是 $[17.5, 30]$, 样本数据分组为 $[17.5, 20)$, $[20, 22.5)$, $[22.5, 25)$, $[25, 27.5)$, $[27.5, 30]$. 根据直方图, 这 200 名学生中每周的自习时间不少于 22.5 小时的人数是 ▲.



- 执行右侧的程序框图, 若输入 $n = 3$, 则输出 $T =$ ▲.
- 已知直线 $l: x + ay - 1 = 0 (a \in \mathbb{R})$ 是圆 $C: x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$ 的对称轴, 过点 $A(-4, a)$ 作圆 C 的一条切线, 切点为 B , 则 $|AB| =$ ▲.



9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的一条渐近线平行于直线 $l: y = 2x + 10$, 双曲线的一个焦点在直线 l 上, 则双曲线的方程为 ▲.

10. 设 P, Q 分别为圆 $x^2 + (y - 6)^2 = 2$ 和椭圆 $\frac{x^2}{10} + y^2 = 1$ 上的点, 则 P, Q 两点间的最大距离是 ▲.

11. 若曲线 $y = x \ln x$ 上点 P 处的切线平行于直线 $2x - y + 1 = 0$, 则点 P 的坐标是 ▲.

12. 设双曲线的左准线与两条渐近线交于 A, B 两点, 左焦点在以 AB 为直径的圆内, 则该双曲线的离心率的取值范围为 ▲.

13. 已知定义 $[2, 4]$ 在函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$, 满足 $xf'(x) + 2f(x) > 0$,

且 $f(\frac{3}{2}) = \frac{2}{3}$, 则不等式 $2f(x) - \frac{3}{x^2} > 0$ 的解集为 ▲.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -3x^2 + 6x, & x \geq 0, \\ -x^3 - 3x^2 + 4, & x < 0, \end{cases}$ 设 $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x(f(x) - a) \geq 0\}$, 若 A 中有且仅有 4 个元素, 则满足条件的整数 a 的个数为 ▲.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分，请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15. (本小题满分 14 分)

设 p : 不等式 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(m-1)x^2 + x + 1$ 在 R 是增函数; q : 方程 $\frac{x^2}{m-1} - \frac{y^2}{m+2} = 1$

表示焦点在 x 轴上的双曲线.

(1) 若 p 为真, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若 “ p 且 q ” 为假命题, “ p 或 q ” 为真命题, 求实数 m 的取值范围.

16. (本小题满分 14 分) 已知曲线 C 上任意一点 $M(x, y)$ 到直线 $l: x = 4$ 的距离是它到点 $N(1, 0)$ 的距离的 2 倍.

(1) 求曲线 C 的方程;

(2) 过点 $P(0, 3)$ 的直线 m 与曲线 C 交于 A, B 两点. 若 A 是 PB 的中点, 求直线 m 的斜率.

17. (本小题满分 14 分)

据环保部门测定, 某处的污染指数与附近污染源的强度成正比, 与到污染源距离的平方成反比, 比例常数为 $k(k > 0)$. 现已知相距 18km 的 A, B 两家化工厂 (污染源) 的污染强度分别为 a, b , 它们连线上任意一点 C 处 (异于 A, B 两点) 的污染指数 y 等于两化工厂对该处的污染指数之和. 设 $AC = x(\text{km})$.

(1) 试将 y 表示为 x 的函数;

(2) 若 $a=1$, 且 $x=6$ 时, y 取得最小值, 试求 b 的值.

18. (本小题满分 16 分)

已知 a, b 为常数, 且 $a \neq 0$, 函数 $f(x) = -ax + b + ax \ln x$, $f(e) = 2$ ($e=2.71828\ldots$ 是自然对数的底数).

(1) 求实数 b 的值;

(2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

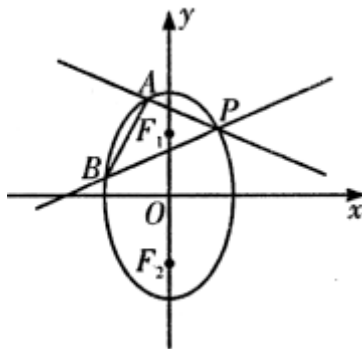
(3) 当 $a=1$ 时, 是否同时存在实数 m 和 M ($m < M$), 使得对每一个 $t \in [m, M]$, 直线 $y=t$ 与曲线 $y=f(x)$ ($x \in [\frac{1}{e}, e]$) 都有公共点? 若存在, 求出最小的实数 m 和最大的实数 M ; 若不存在, 说明理由.

19. (本小题满分 16 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$ 两焦点分别为 F_1, F_2 , P 是椭圆在第一象限弧上一点, 并满足

$\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = 1$, 过 P 作倾斜角互补的两条直线 PA, PB 分别交椭圆于 A, B 两点.

- (1) 求 P 点坐标;
- (2) 求证: 直线 AB 的斜率为定值;
- (3) 求 ΔPAB 面积的最大值.



20. (本小题满分 16 分)

已知函数 $f(x) = x^2 - 8x + a \ln x (a \in \mathbb{R})$.

- (1) 当 $x=1$ 时, $f(x)$ 取得极值, 求 a 的值.
- (2) 当函数 $f(x)$ 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$, 且 $x_1 \neq 1$ 时, 总有

$\frac{a \ln x_1}{1 - x_1} > (m - 2)(4 + 3x_1 - x_1^2)$ 成立, 求 m 的取值范围.

华罗庚中学、江都中学和仪征中学 12 月联考试卷

高二数学参考答案

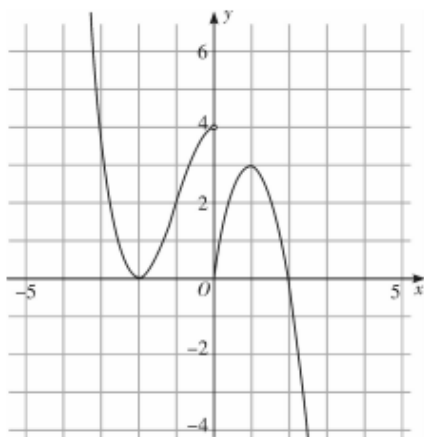
1、 $\exists x_0 \in [0, +\infty), x_0^3 + x_0 < 0$ 2、 $2x + y + 5 = 0, 2x + y - 5 = 0$ 3、 $2\sqrt{2}$

4、1 5、3 或 4 6、140 7、20 8、6 9、 $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$

10、 $6\sqrt{2}$ 11、 (e, e) 12、 $1 < e < \sqrt{2}$ 13、 $\left(\frac{3}{2}, 4\right]$ 14、34

14、

【解析】画出 $f(x)$ 的函数图象如图所示：



当 $x > 0$ 时, $f(x) \geq a$, 当 $x < 0$ 时, $a \geq f(x)$, $\therefore f(3) = -3 \times 9 + 18 = -9$,
 $f(4) = -3 \times 16 + 24 = -24$, $f(-1) = -(-1)^3 - 3 \times (-1)^2 + 4 = 2$,
 $f(-3) = -(-3)^3 - 3 \times (-3)^2 + 4 = 4$, $f(-4) = -(-4)^3 - 3 \times (-4)^2 + 4 = 20$, $\therefore$ 当 $a < 0$ 时 $-24 < a \leq -9$;
 当 $0 \leq a \leq 3$ 时, $a = 0, 2 \leq a \leq 3$; 当 $a > 3$ 时, $4 \leq a < 20$, $\therefore$ 恰好存在 4 个整数 x , 使得 $x(f(x) - a) \geq 0$ 成立,
 $\therefore$ 整数 a 的值为 $-23, -22, \dots, -9$ 及 $0, 2, 3, 4, 5, \dots, 19$, 共 34 个.

15、【解析】(1) 易知 $x^2 + (m-1)x + 1 \geq 0$ 的解集为 $\mathbb{R}$,

则 $\Delta = (m-1)^2 - 4 \leq 0$, 解之得 $-1 \leq m \leq 3$4 分

(2) 方程 $\frac{x^2}{m-1} - \frac{y^2}{m+2} = 1$ 表示焦点在 x 轴上的双曲线,

则 $\begin{cases} m-1>0, \\ m+2>0, \end{cases}$ 即 $q: m>1$6 分

因为“ p 且 q ”为假命题，“ p 或 q ”为真命题，所以 p 和 q 一真一假.7 分

当 p 真 q 假时， $\begin{cases} -1\leq m\leq 3, \\ m\leq 1, \end{cases}$ 得 $-1\leq m\leq 1$;10 分

当 p 假 q 真时， $\begin{cases} m<-1\text{或}m>3, \\ m>1, \end{cases}$ 得 $m>3$13 分

综上， m 的取值范围是 $[-1,1]\cup(3,+\infty)$14 分

16、【解析】(1) 点 $M(x, y)$ 到直线 $x=4$ 的距离是它到点 $N(1, 0)$ 的距离的 2 倍，

$$\text{则 } |x-4| = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

所以，动点 M 的轨迹为椭圆，方程为 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$6 分

(2) $P(0, 3)$ ，设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，由题意知： $2x_1 = 0 + x_2$ ， $2y_1 = 3 + y_2$

椭圆的上下顶点坐标分别是 $(0, \sqrt{3})$ 和 $(0, -\sqrt{3})$ ，经检验直线 m 不经过这 2 点，

即直线 m 斜率 k 存在。8 分

设直线 m 方程为： $y = kx + 3$. 联立椭圆和直线方程，整理得：

$$(3+4k^2)x^2 + 24kx + 24 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{-24k}{3+4k^2}, x_1 \cdot x_2 = \frac{24}{3+4k^2}$$

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = \frac{1}{2} + 2 \Rightarrow \frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2} = \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{(-24k)^2}{(3+4k^2) \cdot 24} = \frac{9}{2} \Rightarrow k = \pm \frac{3}{2}$$

所以，直线 m 的斜率 $k = \pm \frac{3}{2}$14 分

17. 【解析】(1) 设点 C 受 A 污染源污染程度为 $\frac{ka}{x^2}$, 点 C 受 B 污染源污染程度为 $\frac{kb}{(18-x)^2}$,

其中 k 为比例系数, 且 $k > 0$4 分

从而点 C 处受污染程度 $y = \frac{ka}{x^2} + \frac{kb}{(18-x)^2}$, $x \in (0, 18)$ 6 分

(2) 因为 $a=1$, 所以, $y = \frac{k}{x^2} + \frac{kb}{(18-x)^2}$,8 分

$y' = k[-\frac{2}{x^3} + \frac{2b}{(18-x)^3}]$, 令 $y' = 0$, 得 $x = \frac{18}{1+\sqrt[3]{b}}$,12 分

又此时 $x=6$, 解得 $b=8$, 经验证符合题意.

所以, 污染源 B 的污染强度 b 的值为 8.14 分

18. 【解析】(1) 由 $f(e) = 2$ 得 $b = 2$,2 分

(2) 由 (1) 可得 $f(x) = -ax + 2 + ax \ln x$. 从而 $f'(x) = a \ln x$. 因为 $a \neq 0$, 故:

①当 $a > 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $x > 1$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $0 < x < 1$;

②当 $a < 0$ 时, 由 $f'(x) > 0$ 得 $0 < x < 1$, 由 $f'(x) < 0$ 得 $x > 1$;

综上, 当 $a > 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 1)$;

当 $a < 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(0, 1)$, 单调递减区间为 $(1, +\infty)$8 分

(3) 当 $a=1$ 时, $f(x) = -x + 2 + x \ln x$, $f'(x) = \ln x$.

由 (2) 可得, 当 x 在区间 $(\frac{1}{e}, e)$ 内变化时, $f'(x), f(x)$ 的变化情况如下表:

x	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, 1)$	1	$(1, e)$	e
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$2 - \frac{2}{e}$	单调递减	极小值 1	单调递增	2

又 $2 - \frac{2}{e} < 2$, 所以函数 $f(x)$ ($x \in [\frac{1}{e}, e]$) 的值域为 $[1, 2]$.

据此可得, 若 $\begin{cases} m=1, \\ M=2 \end{cases}$, 则对每一个 $t \in [m, M]$, 直线 $y=t$ 与曲线 $y=f(x)$

($x \in [\frac{1}{e}, e]$) 都有公共点. 并且对每一个 $t \in (-\infty, m) \cup (M, +\infty)$, 直线 $y=t$ 与曲线 $y=f(x)$ ($x \in [\frac{1}{e}, e]$) 都没有公共点.

综上, 当 $a=1$ 时, 存在最小的实数 $m=1$, 最大的实数 $M=2$, 使得对每一个 $t \in [m, M]$,

直线 $y=t$ 与曲线 $y=f(x)$ ($x \in [\frac{1}{e}, e]$) 都有公共点.16 分

19、【解析】(1) 由题可得 $F_1(0, \sqrt{2}), F_2(0, -\sqrt{2})$,

设 $P(x_0, y_0)$ ($x_0 > 0, y_0 > 0$)

则 $\overrightarrow{PF_1} = (-x_0, \sqrt{2} - y_0), \overrightarrow{PF_2} = (-x_0, -\sqrt{2} - y_0)$,

$$\therefore \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = x_0^2 - (2 - y_0^2) = 1$$

$$\because P(x_0, y_0) \text{ 在曲线上, 则 } \frac{x_0^2}{2} + \frac{y_0^2}{4} = 1, \therefore x_0^2 = \frac{4 - y_0^2}{2}$$

$$\text{从而 } \frac{4 - y_0^2}{2} - (2 - y_0^2) = 1, \text{ 得 } y_0 = \sqrt{2},$$

则点 P 的坐标为 $(1, \sqrt{2})$ 4 分

(2) 由题意知两直线 PA, PB 的斜率必存在, 设 PB 的斜率为 k ($k > 0$)

则 PB 的方程为 $y - \sqrt{2} = k(x - 1)$

$$\text{由 } \begin{cases} y - \sqrt{2} = k(x - 1) \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \text{ 得 } (2 + k^2)x^2 + 2k(\sqrt{2} - k)x + (\sqrt{2} - k)^2 - 4 = 0$$

设 $B(x_B, y_B)$ ，则 $1 + x_B = \frac{2k(k - \sqrt{2})}{2 + k^2}$, $x_B = \frac{k^2 - 2\sqrt{2}k - 2}{2 + k^2}$

同理可得 $x_A = \frac{k^2 + 2\sqrt{2}k - 2}{2 + k^2}$ 8 分

则 $x_A - x_B = \frac{4\sqrt{2}k}{2 + k^2}$, $y_A - y_B = -k(x_A - 1) - k(x_B - 1) = \frac{8k}{2 + k^2}$

所以， AB 的斜率 $k_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \sqrt{2}$ 为定值。10 分

(3) 设 AB 的直线方程为 $y = \sqrt{2}x + m$

$$\begin{cases} y = \sqrt{2}x + m \\ \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \quad \text{得: } 4x^2 + 2\sqrt{2}mx + m^2 - 4 = 0$$

由 $\Delta = (2\sqrt{2}m)^2 - 16(m^2 - 4) > 0$ 得 $-2\sqrt{2} < m < 2\sqrt{2}$ 12 分

P 到 AB 的距离为 $d = \frac{|m|}{\sqrt{3}}$

$$\begin{aligned} \text{则 } S_{\triangle PAB} &= \frac{1}{2}|AB| \cdot d = \frac{1}{2}\sqrt{(4 - \frac{1}{2}m^2) \cdot 3} \cdot \frac{|m|}{\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{8}m^2(-m^2 + 8)} \leq \sqrt{\frac{1}{8}(\frac{m^2 - m^2 + 8}{2})^2} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

当且仅当 $m = \pm 2 \in (-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$ 时取等号

所以三角形 PAB 面积的最大值为 $\sqrt{2}$ 。16 分

20. 【解析】(1) $f'(x) = \frac{2x^2 - 8x + a}{x} (x > 0)$, $f'(1) = 0$ ，则 $a = 6$ 2 分

检验: $a = 6$ 时, $f'(x) = \frac{2(x-1)(x-3)}{x} (x > 0)$,

所以, $x \in (0,1)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 为增函数;

$x \in (1,3)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 为减函数, 所以 $x=1$ 是极大值点。5 分

(2) $f(x)$ 定义域为 $(0, +\infty)$, 有两个极值点 $x_1, x_2 (x_1 < x_2)$,

则 $t(x) = 2x^2 - 8x + a = 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不等正根,

$$\text{所以 } \begin{cases} \Delta = 64 - 8a > 0 \\ t(0) = a > 0 \\ (\text{对称轴}) x = 2 > 0 \end{cases}, \text{ 所以 } 0 < a < 8.$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1 x_2 = \frac{a}{2} \\ 0 < x_1 < x_2 \end{cases} \quad \text{所以 } \begin{cases} x_2 = 4 - x_1 \\ a = 2x_1 x_2 = 2x_1(4 - x_1) \\ 0 < x_1 < x_2 \end{cases}, \text{ 所以 } 0 < x_1 < 2$$

这样原问题即 $0 < x_1 < 2$ 且 $x_1 \neq 1$ 时, $\frac{a \ln x_1}{1 - x_1} > (m-2)(4 + 3x_1 - x_1^2)$ 成立,

$$\text{即 } \frac{2x_1(4 - x_1) \ln x_1}{1 - x_1} > (m-2)(4 - x_1)(x_1 + 1),$$

$$\text{即 } \frac{2x_1 \ln x_1}{1 - x_1} > (m-2)(x_1 + 1), \quad \text{.....8 分}$$

$$\text{即 } \frac{2x_1 \ln x_1}{1 - x_1} - (m-2)(x_1 + 1) > 0,$$

$$\text{即 } \frac{x_1}{1 - x_1} \left[2 \ln x_1 + \frac{(m-2)(x_1^2 - 1)}{x_1} \right] > 0$$

且 $0 < x_1 < 1$ 时 $\frac{x_1}{1 - x_1} > 0$, $1 < x_1 < 2$ 时 $\frac{x_1}{1 - x_1} < 0$ 。

$$\text{设 } h(x) = 2 \ln x + \frac{(m-2)(x^2 - 1)}{x} (0 < x < 2)$$

$$h'(x) = \frac{(m-2)x^2 + 2x + (m-2)}{x^2} (0 < x < 2)$$

① $m=2$ 时, $h'(x) = \frac{2}{x} > 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上为增函数且 $h(1)=0$

所以 $x \in (1, 2)$ 时, $h(x) > 0$ 不合题意舍去。

② $m > 2$ 时, $h'(x) > 0$, 同①舍去。……………12 分

③ $m < 2$ 时,

(i) $\Delta \leq 0$ 即 $m \leq 1$ 时可知 $h'(x) \leq 0$, $h(x)$ 在 $(0, 2)$ 上为减函数, 且 $h(1)=0$,

$0 < x < 1$ 时, $h(x) > 0$, $1 < x < 2$ 时, $h(x) < 0$,

所以, $\frac{x}{1-x} \left[2 \ln x + \frac{(m-2)(x^2-1)}{x} \right] > 0$ 成立。……………14 分

(ii) $\Delta > 0$ 即 $1 < m < 2$ 时, $h'(x)$ 分子中的一元二次函数的对称轴 $x = \frac{1}{2-m} > 1$,

开口向下, 且 $x=1$ 时的函数值为 $h'(1) = 2(m-1) > 0$,

令 $\alpha = \min\{\frac{1}{2-m}, 2\}$, 则 $x \in (1, \alpha)$ 时, $h'(x) > 0$, $h(x)$ 为增函数, $h(1)=0$,

所以, $h(x) > 0$ 故舍去,

综上所述: $m \leq 1$ 。……………16 分