

11. [2019 年全国 I 卷(理)T11]关于函数 $f(x) = \sin|x| + |\sin x|$ 有下述四个结论:

① $f(x)$ 是偶函数 ② $f(x)$ 在区间 $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ 单调递增

③ $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 4 个零点 ④ $f(x)$ 的最大值为 2

其中所有正确结论的编号是

A. ①②④

B. ②④

C. ①④

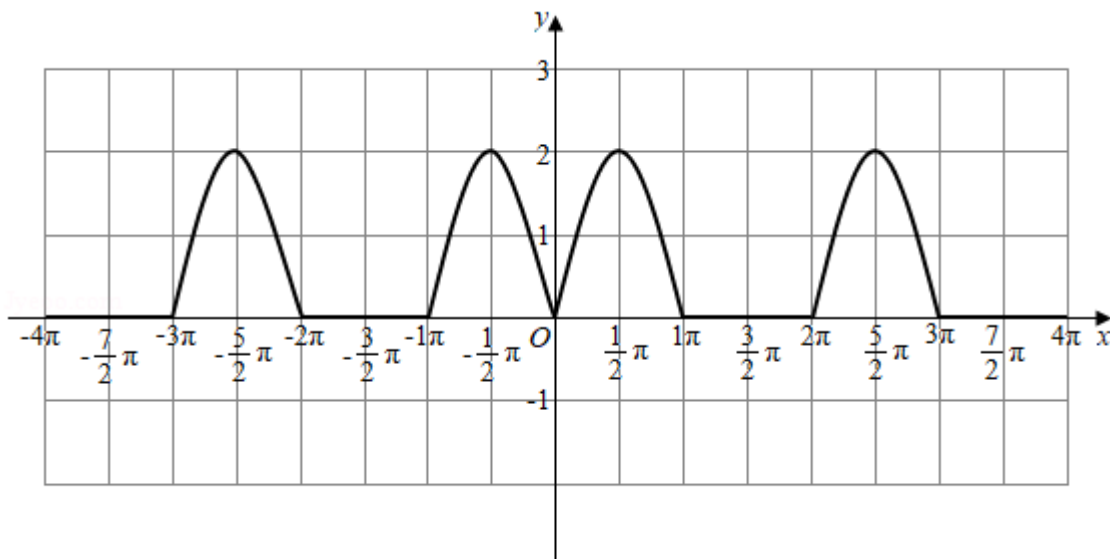
D. ①③

【解答】解: $f(-x) = \sin|-x| + |\sin(-x)| = \sin|x| + |\sin x| = f(x)$ 则函数 $f(x)$ 是偶函数, 故①

正确,

当 $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 时, $\sin|x| = \sin x$, $|\sin x| = \sin x$,

则 $f(x) = \sin x + \sin x = 2\sin x$ 为减函数, 故②错误,



当 $0 \leq x < \pi$ 时, $f(x) = \sin|x| + |\sin x| = \sin x + \sin x = 2\sin x$,

由 $f(x) = 0$ 得 $2\sin x = 0$ 得 $x = 0$ 或 $x = \pi$,

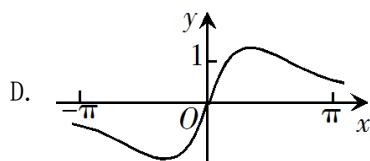
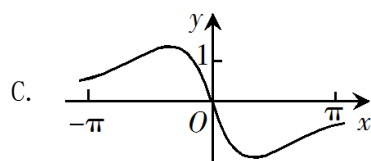
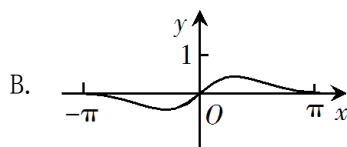
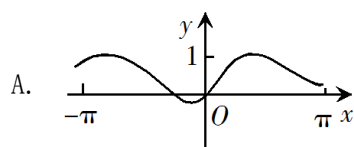
由 $f(x)$ 是偶函数, 得在 $[-\pi, 0)$ 上还有一个零点 $x = -\pi$, 即函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 有 3 个零点, 故③错误,

当 $\sin|x| = 1$, $|\sin x| = 1$ 时, $f(x)$ 取得最大值 2, 故④正确,

故正确是①④,

故选: C.

12. [2019 年全国 I 卷(文)T5] 函数 $f(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x + x^2}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致为



【答案】D

【详解】由 $f(-x) = \frac{\sin(-x) + (-x)}{\cos(-x) + (-x)^2} = \frac{-\sin x - x}{\cos x + x^2} = -f(x)$, 得 $f(x)$ 是奇函数, 其图象关于原点对称. 又 $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{1 + \frac{\pi}{2}}{(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{4 + 2\pi}{\pi^2} > 1$, $f(\pi) = \frac{\pi}{-1 + \pi^2} > 0$. 故选 D.

13. [2019 年全国 I 卷(文)T11] $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $a \sin A - b \sin B = 4c \sin C$, $\cos A = -\frac{1}{4}$, 则 $\frac{b}{c} =$

A. 6

B. 5

C. 4

D. 3

【答案】A

【详解】由已知及正弦定理可得 $a^2 - b^2 = 4c^2$, 由余弦定理推论可得

$$-\frac{1}{4} = \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \therefore \frac{c^2 - 4c^2}{2bc} = -\frac{1}{4}, \therefore \frac{3c}{2b} = \frac{1}{4}, \therefore \frac{b}{c} = \frac{3}{2} \times 4 = 6, \text{ 故选 A.}$$

14. [2019 年全国 II 卷(理)T9] 下列函数中, 以 $\frac{\pi}{2}$ 为周期且在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 单调递增的是

A. $f(x) = |\cos 2x|$ B. $f(x) = |\sin 2x|$ C. $f(x) = \cos |x|$ D. $f(x) = \sin |x|$

【答案】A

【详解】因为 $y = \sin |x|$ 图象如下图, 知其不是周期函数, 排除 D; 因为 $y = \cos |x| = \cos x$,

周期为 2π , 排除 C, 作出 $y = |\cos 2x|$ 图象, 由图象知, 其周期为 $\frac{\pi}{2}$, 在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 单调

递增, A 正确; 作出 $y = |\sin 2x|$ 的图象, 由图象知, 其周期为 $\frac{\pi}{2}$, 在区间 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2})$ 单调递减,

排除 B, 故选 A.

15. [2019 年全国 II 卷(理)T10] 已知 $a \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2\sin 2a = \cos 2a + 1$, 则 $\sin a =$

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

【答案】B

【详解】 $\because 2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha + 1, \therefore 4\sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2\cos^2 \alpha. \because \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \therefore \cos \alpha > 0.$

$\sin \alpha > 0, \therefore 2\sin \alpha = \cos \alpha, \text{ 又 } \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \therefore 5\sin^2 \alpha = 1, \sin^2 \alpha = \frac{1}{5}, \text{ 又}$

$\sin \alpha > 0, \therefore \sin \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \text{ 故选 B.}$

16. [2019 年全国 II 卷(文)T10] 曲线 $y=2\sin x+\cos x$ 在点 $(\pi, -1)$ 处的切线方程为 ()

- A. $x-y-\pi-1=0$ B. $2x-y-2\pi-1=0$
C. $2x+y-2\pi+1=0$ D. $x+y-\pi+1=0$

【答案】C

【详解】当 $x=\pi$ 时, $y=2\sin \pi+\cos \pi=-1$, 即点 $(\pi,-1)$ 在曲线 $y=2\sin x+\cos x$

上. $\because y'=2\cos x-\sin x, \therefore y'|_{x=\pi}=2\cos \pi-\sin \pi=-2$ 则 $y=2\sin x+\cos x$ 在点

$(\pi,-1)$ 处的切线方程为 $y-(-1)=-2(x-\pi)$, 即 $2x+y-2\pi+1=0$. 故选 C.

17. [2019 年全国 III 卷(文)T5] 函数 $f(x)=2\sin x-\sin 2x$ 在 $[0,2\pi]$ 的零点个数为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

【答案】B

【详解】由 $f(x)=2\sin x-\sin 2x=2\sin x-2\sin x\cos x=2\sin x(1-\cos x)=0$,

得 $\sin x=0$ 或 $\cos x=1$, $\because x\in[0,2\pi], \therefore x=0, \pi$ 或 $2\pi. \therefore f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 的零点个数

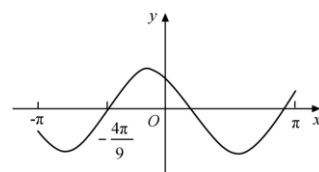
是 3,

故选 B.

18. [2020 年全国 I 卷(理)T7] 设函数 $f(x)=\cos\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 的图像

大致如下图, 则 $f(x)$ 的最小正周期为

- A. $\frac{10\pi}{9}$ B. $\frac{7\pi}{6}$ C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{2}$



【答案】C

【详解】由图可得：函数图象过点 $\left(-\frac{4\pi}{9}, 0\right)$ ，将它代入函数 $f(x)$ 可得：

$$\cos\left(-\frac{4\pi}{9} \cdot \omega + \frac{\pi}{6}\right) = 0, \text{ 又 } \left(-\frac{4\pi}{9}, 0\right) \text{ 是函数 } f(x) \text{ 图象与 } x \text{ 轴负半轴的第一个交点,}$$

所以 $-\frac{4\pi}{9} \cdot \omega + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$ ，解得： $\omega = \frac{3}{2}$ ，所以函数 $f(x)$ 的最小正周期为

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3},$$

故选：C

19. [2020 年全国 I 卷(理)T9] 已知 $\alpha \in (0, \pi)$ ，且 $3\cos 2\alpha - 8\cos \alpha = 5$ ，则 $\sin \alpha =$

- A. $\frac{\sqrt{5}}{3}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{\sqrt{5}}{9}$

【答案】A

【详解】 $3\cos 2\alpha - 8\cos \alpha = 5$ ，得 $6\cos^2 \alpha - 8\cos \alpha - 8 = 0$ ，

即 $3\cos^2 \alpha - 4\cos \alpha - 4 = 0$ ，解得 $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$ 或 $\cos \alpha = 2$ （舍去），

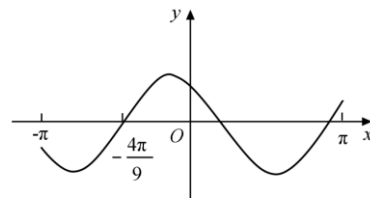
$$\text{又 } \because \alpha \in (0, \pi), \therefore \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

故选：A.

20. [2020 年全国 I 卷(文)T7] 设函数 $f(x) = \cos\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 的图像大致如下图，则

$f(x)$ 的最小正周期为 ()

- A. $\frac{10\pi}{9}$ B. $\frac{7\pi}{6}$
C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{2}$



【答案】C

【详解】由图可得：函数图象过点 $\left(-\frac{4\pi}{9}, 0\right)$ ，将它代入函数 $f(x)$ 可得：

$$\cos\left(-\frac{4\pi}{9} \cdot \omega + \frac{\pi}{6}\right) =$$

又 $\left(-\frac{4\pi}{9}, 0\right)$ 是函数 $f(x)$ 图象与 x 轴负半轴的第一个交点, 所以 $-\frac{4\pi}{9} \cdot \omega + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{2}$, 解

得: $\omega = \frac{3}{2}$

所以函数 $f(x)$ 最小正周期为 $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\frac{3}{2}} = \frac{4\pi}{3}$

故选: C

21. [2020 年全国 II 卷(理) T2] 若 α 为第四象限角, 则 ()

A. $\cos 2\alpha > 0$

B. $\cos 2\alpha < 0$

C. $\sin 2\alpha > 0$

D. $\sin 2\alpha < 0$

【答案】 D

【详解】 方法一: 由 α 为第四象限角, 可得 $\frac{3\pi}{2} + 2k\pi < \alpha < 2\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

所以 $3\pi + 4k\pi < 2\alpha < 4\pi + 4k\pi, k \in \mathbb{Z}$

此时 2α 的终边落在第三、四象限及 y 轴的非正半轴上, 所以 $\sin 2\alpha < 0$

故选: D.

方法二: 当 $\alpha = -\frac{\pi}{6}$ 时, $\cos 2\alpha = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) > 0$, 选项 B 错误;

当 $\alpha = -\frac{\pi}{3}$ 时, $\cos 2\alpha = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) < 0$, 选项 A 错误;

由 α 在第四象限可得: $\sin \alpha < 0, \cos \alpha > 0$, 则 $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha < 0$, 选项 C 错误,

选项 D 正确;

故选: D.

22. [2020 年全国 III 卷(理) T7] 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{2}{3}$, $AC=4$, $BC=3$, 则 $\cos B =$ ()

A. $\frac{1}{9}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{1}{2}$

D. $\frac{2}{3}$

【答案】 A

【详解】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\cos C = \frac{2}{3}$, $AC = 4$, $BC = 3$

根据余弦定理: $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cdot \cos C$, $AB^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 4 \times 3 \times \frac{2}{3}$

可得 $AB^2 = 9$ ，即 $AB = 3$ ，由 $\cos B = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{9 + 9 - 16}{2 \times 3 \times 3} = \frac{1}{9}$ ，故 $\cos B = \frac{1}{9}$ 。

故选：A.

23. [2020 年全国 III 卷 (理) T9] 已知 $2\tan\theta - \tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = 7$ ，则 $\tan\theta =$ ()

A. -2

B. -1

C. 1

D. 2

【答案】D

【详解】 $\because 2\tan\theta - \tan(\theta + \frac{\pi}{4}) = 7$ ， $\therefore 2\tan\theta - \frac{\tan\theta + 1}{1 - \tan\theta} = 7$ ，

令 $t = \tan\theta, t \neq 1$ ，则 $2t - \frac{1+t}{1-t} = 7$ ，整理得 $t^2 - 4t + 4 = 0$ ，解得 $t = 2$ ，即 $\tan\theta = 2$ 。

故选：D.

24. [2020 年全国 III 卷 (文) T5] 已知 $\sin\theta + \sin(\theta + \frac{\pi}{3}) = 1$ ，则 $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) =$ ()

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{2}{3}$

D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

【答案】B

【详解】由题意可得： $\sin\theta + \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = 1$ ，则 $\frac{3}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta = 1$ ，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

从而有： $\sin\theta \cos\frac{\pi}{6} + \cos\theta \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，即 $\sin(\theta + \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

故选：B.

25. [2020 年全国 III 卷 (文) T11] 在 $\triangle ABC$ 中， $\cos C = \frac{2}{3}$ ， $AC = 4$ ， $BC = 3$ ，则 $\tan B =$ ()

A. $\sqrt{5}$

B. $2\sqrt{5}$

C. $4\sqrt{5}$

D. $8\sqrt{5}$

【答案】C

【详解】设 $AB = c, BC = a, CA = b$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C = 9 + 16 - 2 \times 3 \times 4 \times \frac{2}{3} = 9 \therefore c = 3$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{1}{9} \therefore \sin B = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{9}\right)^2} = \frac{4\sqrt{5}}{9} \therefore \tan B = 4\sqrt{5}$$

故选：C

26. [2020 年全国 III 卷 (文) T12] 已知函数 $f(x) = \sin x + \frac{1}{\sin x}$ ，则 ()

A. $f(x)$ 的最小值为 2

B. $f(x)$ 的图像关于 y 轴对称

C. $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \pi$ 对称

D. $f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称

【答案】D

【详解】 $\because \sin x$ 可以为负，所以 A 错；

$\because \sin x \neq 0 \therefore x \neq k\pi (k \in \mathbb{Z})$ $Q f(-x) = -\sin x - \frac{1}{\sin x} = -f(x) \therefore f(x)$ 关于原点对称；

$Q f(2\pi - x) = -\sin x - \frac{1}{\sin x} \neq f(x), f(\pi - x) = \sin x + \frac{1}{\sin x} = f(x)$, 故 B 错；

$\therefore f(x)$ 关于直线 $x = \frac{\pi}{2}$ 对称，故 C 错，D 对

故选：D