

聚焦核心素养 考查关键能力

——2021年高考数学全国卷试题评析

教育部考试中心

摘要: 2021年高考数学全国卷命题贯彻高考内容改革要求,创新试题设计,展现我国的社会主义建设成就,发挥了育人功能。试卷加大开放题的创新力度,突出理性思维,考查关键能力,发挥了选拔功能。试题倡导理论联系实际,利用真实问题情境,体现数学思想方法在解决实际问题中的价值和作用,考查考生利用数学工具解决实际问题的能力。为适应新高考数学不分文理科的要求,加强研究,积极推进高考内容改革,发挥对中学数学教学的引导作用。

关键词: 高考;新高考;高考数学;高考命题;高考评价体系;考试内容改革;试题评价

【中图分类号】G405

【文献标识码】A

【文章编号】1005-8427(2021)07-0070-7

DOI: 10.19360/j.cnki.11-3303/g4.2021.07.010

2021年高考数学全国卷有6套,包括全国甲卷2套(文、理科)、全国乙卷2套(文、理科)、新高考Ⅰ卷1套(不分文理科)、新高考Ⅱ卷1套(不分文理科),由教育部考试中心命制。

2021年高考数学全国卷命题落实高考改革总体要求,贯彻德智体美劳全面发展教育方针,聚焦核心素养,突出关键能力考查,体现了高考数学的科学选拔功能和全面育人导向作用。试题体现以下特点:第一,突出数学本质,重视理性思维,坚持素养导向、能力为重的命题原则;第二,倡导理论联系实际、学以致用,体现数学的应用价值;第三,关注我国社会主义建设和科学技术发展的重要成果,设计真实问题情境,体现时代特征和制度优势;第四,稳步推进改革,科学把握必备知识与关键能力的关系,准确把握数学题型的开放性与数学思维的开放性;第五,稳中求新,全面体现基础性、综合性、应用性和创新性的考查要求。

1 发挥学科特色,彰显教育功能

2021年高考数学全国卷命题坚持思想性与科学性的高度统一,发挥数学应用广泛、联系实际的学科特点,命制具有教育意义的试题,增强学生社会责任感,引导学生形成正确的人生观、价值观、世界观。试题用我国社会主义建设和科技发展的重大成就作为情境,深入挖掘我国社会经济建设和科技发展等方面的学科素材,引导学生关注我国社会现实与经济、科技进步与发展,增强民族自豪感与自信心,增强国家认同,增强理想信念与爱国情怀。

一是关注科技发展与进步。新高考Ⅱ卷第4题以我国航天事业的重要成果北斗三号全球卫星导航系统为试题情境设计立体几何问题,要求考生计算地球静止同步轨道卫星信号所覆盖的地球表面面积与地球表面积的比例。该题文字量约200字,不但考查考生的数学建模素养,而且

收稿日期: 2021-06-15

考查考生阅读理解能力。

二是关注社会与经济发展。全国乙卷理科第6题以北京冬奥会志愿者的培训方案为试题背景,考查逻辑推理能力和运算求解能力。新高考I卷第18题以“一带一路”知识竞赛为背景,考查考生对概率统计基本知识的理解与应用。全国甲卷文、理科第2题以我国在扶贫脱贫工作取得全面胜利和乡村振兴为背景,通过图表给出某地农户家庭收入情况的抽样调查结果,考查考生分析问题和数据处理能力。

三是关注优秀传统文化。将中国数学史中的经典问题作为试题背景,可以让学生感受数学家探究问题解决的过程,潜移默化地增强学生的理想信念与爱国情怀。全国乙卷理科第9题以魏晋时期我国数学家刘徽在其著作《海岛算经》中的测量方法为背景,要求考生根据测量过程中的相关条件,推断海岛高度的计算方法,试题在考查考生综合运用知识解决问题能力的同时,也让考生充分感悟到我国古代数学家的聪明才智。新高考I卷第16题以我国传统文化剪纸艺术为背景,要求考生根据不同剪纸方案,发现若干不同规格的几何图形之间的关系,正确获得数列 $\{S_n\}$ 的通项,考查归纳推理能力,试题的设计让考生体验从特殊到一般的探索数学问题的过程。

2 坚持开放创新,考查关键能力

2020年10月,中共中央、国务院印发的《深化新时代教育评价改革总体方案》(以下简称《总体方案》)提出,构建引导学生德智体美劳全面发展的考试内容体系,改变相对固化的试题形式,增强试题开放性,减少死记硬背和“机械刷题”现象^[1]。2021年高考数学全国卷命题积极贯彻《总体方案》要求,加大开放题的创新力度,发挥数学科的选拔功能。

2.1 “举例问题”灵活开放

数学科的“举例问题”要求考生根据题目给出的要求、性质和定理等条件,从题干中获取信息,整理信息,写出符合题干要求的结论或是具体实例。以往的数学试题是给出具体的数学对象,要求学生研究对象的性质,而“举例问题”是给出一些条件和性质,要求列举出符合条件的对象。通常情况下,符合条件的对象有很多,从而增加了试题的开放度。“举例问题”在2021年高考数学中首次出现。

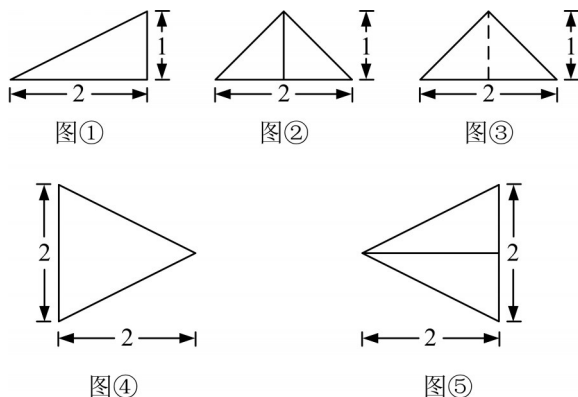
例1(新高考II卷第14题)

写出一个具有性质①②③的函数 $f(x)=$ _____. ① $f(x_1x_2)=f(x_1)f(x_2)$; ②当 $x \in (0, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$; ③ $f'(x)$ 是奇函数。

该题要求考生在理解条件①②③的基础上,构建出一个函数 $f(x)$ 。由于答案是开放的,所以在考查思维的灵活性方面起到了很好的作用,同时也给不同水平的考生提供了充分发挥自己数学能力的空间。

例2(全国乙卷文、理科第16题)

以图①为正视图,在图②③④⑤中选两个分别作为侧视图和俯视图,组成某个三棱锥的三视图,则所选侧视图和俯视图的编号依次为_____(写出符合要求的一组答案即可)。



该题没有给出几何体的空间图形,而是给出这个几何体的正视图,要求考生在所给的图②~图⑤中选出侧视图和俯视图,与①组成这个几何体的三视图。本题的正确答案有2个:②⑤或③④。考生可以先从侧视图入手,借助于线面空间关系,确定相应的俯视图;也可以先从俯视图入手,然后选定相应的侧视图。不同的答案对应着不同的思考方案,思维的灵活性体现在方案的选择上,具有较好的选拔性。

2.2 “结构不良问题”适度开放

数学科的“结构不良问题”包括:1)问题条件或数据部分缺失或冗余;2)问题目标界定不明确;3)具有多种解决方法、途径;4)具有多种评价解决标准;5)所涉及的概念、规则和原理等不确定。高考数学科中的结构不良试题不要求考生自己补充缺失的条件,而是在给出的几个条件中要求考生先选择后补充,体现了一定程度上的适度开放。

例3(全国甲卷理科第18题)

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数,记 S_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和,从下面①②③中选取两个作为条件,证明另外一个成立.

①数列 $\{a_n\}$ 是等差数列;②数列 $\{\sqrt{S_n}\}$ 是等差数列;③ $a_2 = 3a_1$.

注:若选择不同的组合分别解答,则按第一个解答计分.

本题设计了3个不同的组合方案,组成3个真命题,给考生很充分的选择空间。考生选择不同的条件和结论组成命题,就体现了不同的数学思维角度和方式。“结构不良问题”的适度开放不仅有益于考生在不同层面发挥自己的数学能力,而且对中学数学教学有积极导向,引导高中数学在数学概念与数学方法上重视培养学生的数学核心素养。

例4(新高考Ⅱ卷第22题)

已知函数 $f(x) = (x-1)e^x - ax^2 + b$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)从①②两组条件中选取一组作为已知条件,证明: $f(x)$ 恰有一个零点.

① $\frac{1}{2} < a \leq \frac{e^2}{2}, b > 2a$; ② $0 < a < \frac{1}{2}, b \leq 2a$.

注:如果选择两组条件分别解答,按第一个解答计分.

本题第(1)问全面考查函数单调性的基本知识和基本思想方法,同时考查考生应用分类讨论思想解决问题的能力。第(2)问要求考生在①、②两组条件中选取一组作为已知条件,证明 $f(x)$ 恰有一个零点。根据分类讨论的情况,恰当选择新的条件完成 $f(x)$ 恰有一个零点的证明,不仅体现了针对“结构不良问题”适度开放命题的科学性,而且体现了素养导向、能力为重的命题原则。本题重点考查理性思维,同时对逻辑推理能力、数学抽象能力、直观想象能力也进行了深入的考查。

2.3 “存在问题”有序开放

数学科的“存在问题”要求学生根据题目所给的条件,判断符合题目条件的对象是否存在,如果对象存在就进行证明,如果对象不存在则说明理由。通常情况下,“存在问题”包括判断数值、点、直线、平面、图形等是否存在。存在问题不同于一般的证明题,需要学生先判断符合条件的对象是否存在,然后再进行证明,从而能够较好地体现解决问题的有序性和开放性。

例5(新高考Ⅱ卷第18题)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 已知 $b = a + 1, c = a + 2$.

(1)若 $2\sin C = 3\sin A$,求 $\triangle ABC$ 的面积;

(2)是否存在正整数 a ,使得 $\triangle ABC$ 为钝角三角形? 若存在,求 a ;若不存在,说明理由.

本题的背景选取于教材,内容贴近学生生活.已知 $\triangle ABC$ 的对边分别为 $a, a+1, a+2$,第(2)问要求考生判断是否存在正整数 a ,使得 $\triangle ABC$ 为钝角三角形,并运用数学推理说明理由.试题设计具有开放性,直觉上会发现 $a=3$ 时, $\triangle ABC$ 是直角三角形,且 $\angle C$ 是直角;进一步发现 $\triangle ABC$ 是钝角三角形时, $\cos C < 0$,由此推理可得正整数 $a=2$.本题重点考查逻辑推理能力和运算求解能力.

例6(新高考I卷第21题)

在平面直角坐标系 xOy 中,已知点 $F_1(-\sqrt{17}, 0)$, $F_2(\sqrt{17}, 0)$,点 M 满足 $|MF_1| - |MF_2| = 2$.记 M 的轨迹为 C .

(1)求 C 的方程;

(2)设点 T 在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上,过 T 的两条直线分别交 C 于 A, B 两点和 P, Q 两点,且 $|TA| \cdot |TB| = |TB| \cdot |TQ|$,求直线 AB 的斜率与直线 PQ 的斜率之和.

本题的问题情境具有开放性,将常见的“直线与双曲线相交”设计为“直线与双曲线的半支相交”的新情境;同时,本题的问题还具有存在性,点 T 在直线 $x = \frac{1}{2}$ 上,且 $|TA| \cdot |TB| = |TB| \cdot |TQ|$,要求考生将思维重点集中于寻找两条直线的斜率关系,而不是探索点 T 所在区域.本题考查考生在开放的情境中发现主要矛盾的能力,重点考查运用解析几何的基本思想方法分析问题和解决问题的能力.

3 倡导理论联系实际,学以致用

中国高考评价体系提出基础性、应用性、综合性、创新性考查要求^[2],2021年高考数学全国卷命题全面落实这4个方面的考查要求,并在应用性上进行了重点探索.

例7(新高考II卷21题)

假设开始时有一个微生物个体(称为第0代),该个体繁殖的若干个个体,形成第1代,第1代的每个个体繁殖的若干个个体,形成第2代,…….假设每个个体繁殖的个体数相互独立且分布列相同,记第1代微生物的个体总数为 X , X 的分布列为 $P(X=i) = p_i > 0, i = 0, 1, 2, 3$.

(1)若 $p_0 = 0.4, p_1 = 0.3, p_2 = 0.2, p_3 = 0.1$,求 $E(X)$;

(2)以 p 表示这种微生物最终消亡的概率.已知 p 是关于 x 的方程 $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的最小正根.证明:当 $E(X) \leq 1$ 时, $p = 1$;当 $E(X) > 1$ 时, $p < 1$;

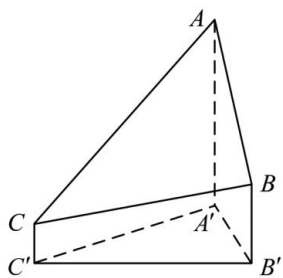
(3)说明(2)的结论的意义.

本题以生命科学中某种微生物为背景,研究该种微生物繁殖形成若干代后长期存在的条件或最终消亡的原因.试题情境取材于生命科学中的真实问题,生动地体现了概率在生命科学中的应用.试题要求考生理解第1代微生物个体总数 X 的分布列和数学期望的意义,理解微生物最终消亡的概率 p ,以及与 p 相关的数学模型 $p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 = x$ 的意义.本题考查了数学抽象、直观想象、逻辑推理等数学核心素养,重点考查综合应用概率、数列、方程、函数等知识和方法解决实际问题的能力.

例8(全国甲卷理科第8题)

2020年12月8日,中国和尼泊尔联合公布珠穆朗玛峰最新高程为8 848.86(单位:m),三角高程测量法是珠峰高程测量方法之一.下图是三角高程测量法的一个示意图,现有 A, B, C 三点,且 A, B, C 在同一水平面上的投影 A', B', C' 满足 $\angle A'C'B' = 45^\circ, \angle A'B'C' = 60^\circ$.由 C 点测得 B 点的仰角为 $15^\circ, BB'$ 与 CC' 的差为100;由 B 点测得 A 点的仰角为 45° ,则 A, C 两点到水平面 $A'B'C'$ 的高

度差 $AA' - CC'$ 约为 ($\sqrt{3} \approx 1.732$)



- A. 346 B. 373 C. 446 D. 473

本题以测量珠穆朗玛峰高程的方法之一——三角高程测量法为背景,要求考生根据示意图和相关数量关系,用该测量法计算A,C两点到水平面 $A'B'C'$ 的高度差。问题背景真实,题目设计突出理论联系实际,要求考生能正确应用线线关系、线面关系、点面关系等几何知识,构建计算模型,同时考查考生运用正弦定理等解三角形的知识和方法解决实际问题的能力。

身心健康是素质教育的核心内容。在高考评价体系的核心价值指标体系中,包含有健康情感的指标,要求学生具有健康意识,注重增强体质,健全人格,锻炼意志^[2]。2021年高考数学全国卷试题对相关内容也有所体现。

例9(全国甲卷理科第4题、文科第6题):

青少年视力是社会普遍关注的问题,视力情况可借助视力表测量。通常用五分记录法和小数记录法记录视力数据,五分记录法的数据 L 和小数记录法的数据 V 满足 $L = 5 + \lg V$ 。已知某同学视力的五分记录法的数据为4.9,则其视力的小数记录法的数据约为($\sqrt[10]{10} \approx 1.259$)

- A. 1.5 B. 1.2 C. 0.8 D. 0.6

本题以社会普遍关注的青少年视力问题为背景,要求考生理解五分记录法测量视力所得数据 L 与小数记录法测量视力所得数据 V 的关系,即 $L = 5 + \lg V$,重点考查数学理解能力和运算求解能力。

例10(全国乙卷文、理科第17题)

某厂研制了一种生产高精产品的设备,为检验新设备生产产品的某项指标有无提高,用一台旧设备和一台新设备各生产了10件产品,得到各件产品该项指标数据如下:

旧设备	9.8	10.3	10.0	10.2	9.9	9.8	10.0	10.1	10.2	9.7
新设备	10.1	10.4	10.1	10.0	10.1	10.3	10.6	10.5	10.4	10.5

旧设备和新设备生产产品的该项指标的样本平均数分别记为 $\bar{x}$ 和 $\bar{y}$,样本方差分别记为 s_1^2 和 s_2^2 。

(1)求 $\bar{x}, \bar{y}, s_1^2, s_2^2$;

(2)判断新设备生产产品的该项指标的均值

较旧设备是否有显著提高(如果 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$,则认为新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备有显著提高,否则不认为有显著提高)。

本题以芯片生产中的刻蚀速率为原型,设计概率统计的应用问题,要求考生根据新旧2台设备各生产10件产品得到的某项指标数据,判断新设备生产产品的该项指标的均值较旧设备是否有显著提高,即研究 $\bar{y} - \bar{x} \geq 2\sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{10}}$ 是否成立。本题考查考生对平均数、方差等知识的理解和应用,同时引导考生关注科技发展,认识到科技创新的重要性。

例11(新高考Ⅱ卷第6题)

某物理量的测量结果服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$,则下列结论中不正确的是

- A. σ 越小,该物理量一次测量结果落在(9.9, 10.1)内的概率越大
 B. 该物理量一次测量结果大于10的概率是0.5
 C. 该物理量一次测量结果大于10.01的概率与小于9.99的概率相等
 D. 该物理量一次测量结果落在(9.9, 10.2)内的概率与落在(10, 10.3)内的概率相等

本题以某物理量的测量为背景,要求考生在测量结果服从正态分布 $N(10, \sigma^2)$ 的条件下,在4个选项中选出不正确的选项。在工业生产、科技研究等许多领域,测量方法和测量数据分析与应用十分重要,本题以此为背景,考查考生对正态分布基本知识的理解与应用,引导学生重视数学实验,重视数学的应用。

4 加强考试科学设计,稳步推进内容改革

新高考改革推行数学不分文理科,为保证改革顺利进行,命制不分文理科的测试卷,于2021年1月在第三批新高考试点的8省份进行了试测,确保了考试的科学性。2021年新高考数学命题坚持全面落实高考评价体系,坚持改革创新,稳步推进新高考内容改革。

2021年使用新高考全国卷的省份增加到10个。为此,根据考生群体的变化,科学调控试卷的难度。在选择题、填空题、解答题部分重视数学基础知识和基本应用,重视考生数学思维水平的层次性,命制了适合考生群体水平、合理科学体现区分度的新高考 I 卷和 II 卷。

4.1 新老高考过渡期的考试内容重点

依据《新高考过渡期数学科考试范围说明》,科学设计考试内容,重点关注《高中实验版数学课程标准》和《高中数学课程标准(2017年版)》中的公共内容,并将这些内容确定为过渡时期的重点内容。2021年新高考数学试题对正态分布、棱台、双曲线等内容都进行了考查。新高考 II 卷第13题,全国乙卷理科第13题、文科第14题,全国甲卷文、理科第5题,均考查了双曲线的基本概念和基本方法的应用。新高考 I 卷第21题以直线与双曲线右支相交为背景,重点考查考生综合应用解析几何基本思想方法解决问题的能力。新高考 II 卷第5题考查考生对正四棱台的基本知识和基本方法的掌握程度。新高考 II 卷第6题考查

考生对正态分布基本概念的理解和在实际问题中的应用能力。

4.2 继续推进题型和试卷结构改革

2021年新高考数学命题继续推进题型和试卷结构的创新。新高考 I 卷、II 卷第9~12题为多选题,全部选对得5分,部分选对得2分,有选错的得0分。这样的设计能更准确地识别考生对数学概念、数学方法的掌握程度,为考生提供了发挥自己水平的空间。

例12(新高考 I 卷第10题)

已知 O 为坐标原点,点 $P_1(\cos \alpha, \sin \alpha)$, $P_2(\cos \beta, -\sin \beta)$, $P_3(\cos(\alpha + \beta), \sin(\alpha + \beta))$, $A(1, 0)$, 则

A. $|\overrightarrow{OP_1}| = |\overrightarrow{OP_2}|$

B. $|\overrightarrow{AP_1}| = |\overrightarrow{AP_2}|$

C. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_3} = \overrightarrow{OP_1} \cdot \overrightarrow{OP_2}$

D. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP_1} = \overrightarrow{OP_2} \cdot \overrightarrow{OP_3}$

针对本题考生容易发现选项 A 正确,判断 C 是正确选项的难度高于选项 A 的判断难度。选对 A 得2分, A、C 均选对得5分,体现了难度的梯度设计。

例13(新高考 I 卷第12题)

在正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = AA_1 = 1$, 点 P 满足 $\overrightarrow{BP} = \lambda \overrightarrow{BC} + \mu \overrightarrow{BB_1}$, 其中 $\lambda \in [0, 1]$, $\mu \in [0, 1]$, 则

A. 当 $\lambda = 1$ 时, $\triangle AB_1P$ 的周长为定值

B. 当 $\mu = 1$ 时, 三棱锥 $P - A_1BC$ 的体积为定值

C. 当 $\lambda = \frac{1}{2}$ 时, 有且仅有一个点 P , 使得 $A_1P \perp BP$

D. 当 $\mu = \frac{1}{2}$ 时, 有且仅有一个点 P , 使得 $A_1B \perp$ 平面 AB_1P

本题考查三棱锥的基本概念和解答立体几何问题的基本方法,考查考生观察问题、思考问题和发现问题的能力,对考生的空间想象能力和逻辑推理能力要求较高。

新高考卷设置“一题两空”形式的填空题,从评价角度来看,可以更准确地区分考生对数学概念的理解,对数学方法的应用。

例 14(新高考 I 卷第 16 题)

某校学生在研究民间剪纸艺术时,发现剪纸时经常会沿纸的某条对称轴把纸对折. 规格为 $20\text{ dm} \times 12\text{ dm}$ 的长方形纸,对折 1 次共可以得到 $10\text{ dm} \times 12\text{ dm}$, $20\text{ dm} \times 6\text{ dm}$ 两种规格的图形,它们的面积之和 $S_1 = 240\text{ dm}^2$,对折 2 次共可以得到 $5\text{ dm} \times 12\text{ dm}$, $10\text{ dm} \times 6\text{ dm}$, $20\text{ dm} \times 3\text{ dm}$ 三种规格的图形,它们的面积之和 $S_2 = 180\text{ dm}^2$,以此类推. 则对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数为 ____;如果对折 n 次,那么 $\sum_{k=1}^n S_k = \underline{\hspace{2cm}}\text{ dm}^2$.

本题的第一个空要求考生通过分析归纳得到“对折 4 次共可以得到不同规格图形的种数”,第二个空要求考生进一步归纳出 S_k 的通项表达

式,2 个空考查要求科学合理,思维水平的层次要求得到准确体现。

5 结束语

2021 年高考数学全国卷命题很好地落实了立德树人、服务选才、引导教学的指导思想,坚持高考的核心价值,突出学科特色,重视数学本质,发挥了数学科的选拔功能,为深化中学数学教学改革起到积极的引领作用。

参考文献:

- [1] 中共中央 国务院印发《深化新时代教育评价改革总体方案》[EB/OL]. (2020-10-13) [2021-06-09]. http://www.gov.cn/zhengce/2020-10/13/content_5551032.htm.
- [2] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京: 人民教育出版社, 2019.
- [3] 赵轩, 任子朝, 翟嘉祺. 新高考数学应用能力考查研究[J]. 数学通报, 2021(3): 22-24.

Focusing on Core Competences and Assessing Key Abilities:

Analysis of the Mathematics Test of the 2021 Gaokao

National Education Examinations Authority

Abstract: The mathematics test of the 2021 Gaokao implements the requirement of the Gaokao content reform, innovates the design of test items, demonstrates the achievement of the socialist construction of China, and plays the role of education on thought. The test also strengthens the innovation of open questions, emphasizes rational thinking, assesses key abilities, and plays the role of talent selection. In addition, the test advocates putting theory into practice, utilizes authentic scenarios of problems, shows the value and function of mathematical thought in solving real-life problems, and assesses students' ability to solve real-life problems with mathematical tools. To adjust to the requirement of the mathematics test of new Gaokao which abandons the arbitrary division between humanities and sciences, it is necessary to enhance research, actively promote the Gaokao content reform, and achieve the function to guide the teaching of mathematics in middle school.

Keywords: college entrance examination; mathematics test of Gaokao; item development of Gaokao; Gaokao Assessment Framework; test content reform; test analysis

(责任编辑:周黎明)