2018 年全国高中数学联赛江苏赛区

初赛参考答案与评分细则

一、填空题（本题共 10 小题，每小题 7 分，共 70 分．要求直接将答案写在横线上.）

1．函数 $y=|\cos x|-\cos 2x\ (x\in\mathbf{R})$ 的值域是______.

答案：$[0,\ \frac{9}{8}]$.

解：$y=|\cos x|-\cos 2x=-2|\cos x|^2+|\cos x|+1=-2(|\cos x|-\frac{1}{4})^2+\frac{9}{8}$,

因为 $0\leqslant|\cos x|\leqslant1$，所以 $0\leqslant y\leqslant\frac{9}{8}$.

2．已知 $(a+bi)^2=3+4i$，其中 a，$b\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位，则 $a^2+b^2=$______.

答案：5.

解：由 $(a+bi)^2=3+4i$ 得 $|a+bi|^2=|3+4i|$，即 $a^2+b^2=5$.

3．圆心在抛物线 $x^2=2y$ 上，并且和该抛物线的准线及 y 轴都相切的圆的方程为______.

答案：$(x+1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=1$ 和 $(x-1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=1$.

解：抛物线 $x^2=2y$ 的准线方程为 $y=-\frac{1}{2}$.

设所求圆的圆心为 $(x_0,\ y_0)$，则 $x_0^2=2y_0$，且 $|x_0|=y_0+\frac{1}{2}$，解得 $x_0=\pm1$，$y_0=\frac{1}{2}$,

故所求圆的方程为 $(x\pm1)^2+(y-\frac{1}{2})^2=1$.

4．设函数 $f(x)=\frac{1-4^x}{2^x}-x$，则不等式 $f(1-x^2)+f(5x-7)<0$ 的解集为______.

答案：$(2,\ 3)$.

解：因为 $f(-x)=\frac{1-4^{-x}}{2^{-x}}+x=\frac{4^x-1}{2^x}+x=-f(x)$，所以 $f(x)$ 是奇函数且为 $\mathbf{R}$ 上的减函数.

由 $f(1-x^2)+f(5x-7)<0$，得 $f(5x-7)<f(x^2-1)$，所以 $5x-7>x^2-1$.

即 $x^2-5x+6<0$，解之得：$2<x<3$.

5．已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 12 项的和为 60，则 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{12}|$ 的最小值为______.

答案：60.

解：$|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{12}|\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_{12}=60$，又当 $a_1=a_2=\cdots=a_{12}=5$ 时，等号成立，

故 $|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{12}|$ 的最小值为 60.

6．已知正四面体内切球的半径是 1，则该正四面体的体积为______.

答案：$8\sqrt{3}$.

解：设正四面体的棱长为 a.

则该正四面体的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a$，全面积为 $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2\times4$.

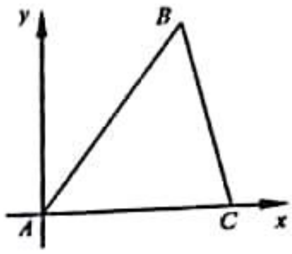
所以$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2\times1\times4=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a$，解得 $a=2\sqrt{6}$.

从而正四面体的体积为$\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times a^2\times\frac{\sqrt{6}}{3}a=8\sqrt{3}$.

7．在$\triangle ABC$ 中，$AB=5$，$AC=4$，且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$．设 P 为平面 ABC 上的一点，

则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是________.

答案：$-\frac{65}{8}$.



解：由 $AB=5$，$AC=4$，且$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=12$ 得 $\cos A=\frac{3}{5}$.

如图，以 A 为坐标原点，AC 为 x 轴建立直角坐标系，

则 $C(4,0)$，$B(3,4)$．设 $P(x,y)$，

则 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})=(-x,-y)\cdot(7-2x,4-2y)=2x^2-7x+2y^2-4y$

$$=2(x-\frac{7}{4})^2+2(y-1)^2-\frac{65}{8}.$$

即 $\overrightarrow{PA}\cdot(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC})$ 的最小值是$-\frac{65}{8}$.

8．设 $g(n)=\sum\limits_{k=1}^{n}(k,n)$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，(k,n) 表示 k 与 n 的最大公约数，则 $g(100)=$________.

答案：520.

解：如果$(m,n)=1$，则 $g(mn)=g(m)g(n)$，

所以 $g(100)=g(4)g(25)$.

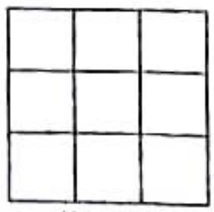
又 $g(4)=1+2+1+4=8$，

$g(25)=5\times4+25+(25-5)=65$，

所以 $g(100)=8\times65=520$.

9．将 1，2，3，4，5，6，7，8，9 这 9 个数随机填入 3×3 的方格表中，每个小方格恰填写一个数，且所填数各不相同，则使每行、每列所填数之和都是奇数的概率是________.

答案：$\frac{1}{14}$.



(第 9 题图)

解：要使每行、每列所填数之和都是奇数，

必须使每行或每列中要么只有一个奇数，要么三个全为奇数，

故满足条件的填法共有 $C_3^1\times C_3^1\times5!\times4!$种.

因此所求的概率为$\frac{C_3^1\times C_3^1\times 5!\times 4!}{9!}=\frac{1}{14}$.

10. 在 1，2，3，4，…，1000 中，能写成 a^2-b^2+1（a，$b\in\mathbf{N}$）的形式，且不能被 3 整除的数有________个.

答案：501.

解：设 $S=\{1,2,3,4,\cdots,1000\}$.

若 $n=a^2-b^2+1$，则 $n\not\equiv 3(\mathrm{mod}4)$.

又 $4k=(2k)^2-(2k-1)^2+1$，$4k+1=(k+1)^2-(k-1)^2+1$，$4k+2=(2k+1)^2-(2k)^2+1$，

因此，$n=a^2-b^2+1$ 当且仅当 $n\not\equiv 3(\mathrm{mod}4)$.

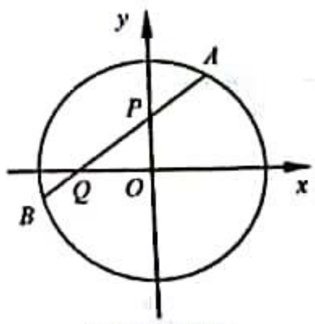
令 $A=\{a\in S\,|\,a\equiv 3(\mathrm{mod}4)\}$，$B=\{b\in S\,|\,b\equiv 0(\mathrm{mod}3)\}$，则 $A\cap B=\{c\in S\,|\,c\equiv 3(\mathrm{mod}12)\}$，

因此 $|A|=250$，$|B|=333$，$|A\cap B|=84$，

从而符合条件的数的个数为 $1000-250-333+84=501$.

二、解答题（本大题共 4 小题，每小题 20 分，共 80 分）

11. 如图，已知圆 O 的方程为 $x^2+y^2=4$，过点 $P(0,1)$ 的直线 l 与圆 O 交于点 A，B，与 x 轴交于点 Q. 设 $\overrightarrow{QA}=\lambda\overrightarrow{PA}$，$\overrightarrow{QB}=\mu\overrightarrow{PB}$，求证：$\lambda+\mu$ 为定值.



（第 11 题图）

证明：当 AB 与 x 轴垂直时，此时点 Q 与点 O 重合

从而 $\lambda=2$，$\mu=\frac{2}{3}$，$\lambda+\mu=\frac{8}{3}$. ………………………… 5 分

当点 Q 与点 O 不重合时，直线 AB 的斜率存在.

设 AB：$y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 $Q(-\frac{1}{k},0)$.

由题设得：$x_1+\frac{1}{k}=\lambda x_1$，$x_2+\frac{1}{k}=\mu x_2$，即 $\lambda+\mu=1+\frac{1}{kx_1}+1+\frac{1}{kx_2}=2+\frac{x_1+x_2}{kx_1x_2}$.

………………………… 10 分

将 $y=kx+1$ 代入 $x^2+y^2=4$，得 $(1+k^2)x^2+2kx-3=0$，

则 $\triangle>0$，$x_1+x_2=\frac{-2k}{1+k^2}$，$x_1x_2=\frac{-3}{1+k^2}$.

所以 $\lambda+\mu=2+\frac{-2k}{-3k}=\frac{8}{3}$.

………………………… 20 分

综上，$\lambda+\mu$ 为定值 $\frac{8}{3}$.

12．已知$\{a_n\}$是公差为$d(d\neq0)$的等差数列，且$a_1+t^2=a_2+t^3=a_3+t$.

（1）求实数t，d的值；

（2）若正整数满足 $m<p<r$，$a_m-2t^m=a_p-2t^p=a_r-2t^r=0$，求数组$(m,\ p,\ r)$和相应的通项公式$a_n$.

解：（1）由题，$\begin{cases}a_1+t^2=a_1+d+t^3,\\ a_1+d+t^3=a_1+2d+t.\end{cases}$ 即 $\begin{cases}d=t^2-t^3,\\ d=t^3-t.\end{cases}$

因为$d\neq0$，所以$t\neq0$，$t\neq1$，所以由 $2t^2-t-1=0$ 得 $t=-\frac{1}{2}$，$d=\frac{3}{8}$.

………………………… 10分

（2）由 $a_m-2t^m=a_p-2t^p=a_r-2t^r=0$，$t=-\frac{1}{2}$，$d=\frac{3}{8}$，

得 $(p-m)d=2[(-\frac{1}{2})^p-(-\frac{1}{2})^m]$，及 $(r-p)d=2[(-\frac{1}{2})^r-(-\frac{1}{2})^p]$，

即 $\frac{3}{8}(p-m)=2[(-\frac{1}{2})^p-(-\frac{1}{2})^m]$，及 $\frac{3}{8}(r-p)=2[(-\frac{1}{2})^r-(-\frac{1}{2})^p]$，

也即 $3(p-m)=2^4[(-\frac{1}{2})^p-(-\frac{1}{2})^m]$，及 $3(r-p)=2^4[(-\frac{1}{2})^r-(-\frac{1}{2})^p]$，

两式左边都是正整数，故 $m<p<r\leqslant4$，且 m，p 都是奇数.

所以 $m=1$，$p=3$，$r=4$，$a_1=-1$.

验证如下：

$a_1-2(-\frac{1}{2})=-1-2(-\frac{1}{2})=0$；

$a_3-2(-\frac{1}{2})^3=\frac{9}{8}-\frac{11}{8}-2(-\frac{1}{2})^3=0$；

$a_4-2(-\frac{1}{2})^4=\frac{12}{8}-\frac{11}{8}-2(-\frac{1}{2})^4=0$.

所以 $(m,\ p,\ r)=(1,\ 3,\ 4)$，$a_n=-1+\frac{3}{8}(n-1)=\frac{3}{8}n-\frac{11}{8}$.　…………………… 20分

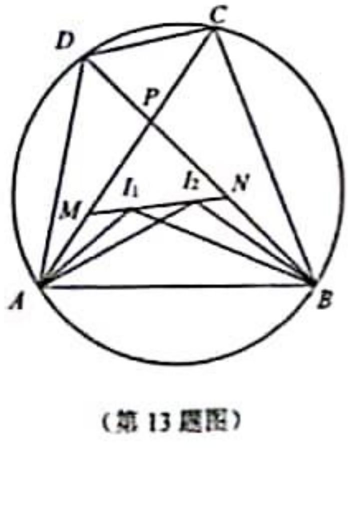
13．如图，在圆内接四边形$ABCD$中，对角线AC与BD交于点P，$\triangle ABD$与$\triangle ABC$的内心分别为I_1和I_2，直线I_1I_2分别与AC，BD交于点M，N，求证：$PM=PN$.

证明：因为I_1，I_2分别为$\triangle ABD$与$\triangle ABC$的内心，

所以 $\angle I_1AB=\frac{1}{2}\angle DAB$，$\angle I_1BA=\frac{1}{2}\angle DBA$，

$\angle I_2AB=\frac{1}{2}\angle CAB$，$\angle I_2BA=\frac{1}{2}\angle CBA$，

故 $\angle AI_1B=180^\circ-\frac{1}{2}(\angle DAB+\angle DBA)$，



（第13题图）

$\angle AI_2B=180°-\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle CBA)$.

在 $\triangle ABD$ 与 $\triangle ABC$ 中，$\angle ADB=\angle ACB$，

所以 $\angle DAB+\angle DBA=\angle CAB+\angle CBA$，

从而 $\angle AI_1B=\angle AI_2B$，故 A，I_1，I_2，B 四点共圆． ………………………… 10 分

因此 $\angle I_1I_2A=\angle I_1BA=\frac{1}{2}\angle DBA$，

则 $\angle PMN=\angle MAI_2+\angle MI_2A=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle DBA)$.

同理，$\angle PNM=\frac{1}{2}(\angle CAB+\angle DBA)$.

所以$\angle PMN=\angle PNM$，即 $PM=PN$. ………………………… 20 分

14．从 1，2，3，…，2050 这 2050 个数中任取 2018 个组成集合 A，把 A 中的每个数染上红色或蓝色．求证：总存在一种染色方法，使得有 600 个红数及 600 个蓝数满足下列两个条件：

①这 600 个红数的和等于这 600 个蓝数的和；

②这 600 个红数的平方和等于这 600 个蓝数的平方和．

证明一： 注意到 $1+4+6+7=2+3+5+8=18$，且 $1^2+4^2+6^2+7^2=2^2+3^2+5^2+8^2=102$.

则$(8k+1)+(8k+4)+(8k+6)+(8k+7)=(8k+2)+(8k+3)+(8k+5)+(8k+8)$，

且$(8k+1)^2+(8k+4)^2+(8k+6)^2+(8k+7)^2=(8k+2)^2+(8k+3)^2+(8k+5)^2+(8k+8)^2$. ………………………… 10 分

把 A 中的 $8k+1$，$8k+4$，$8k+6$，$8k+7$ 型数染成红色，

$8k+2$，$8k+3$，$8k+5$，$8k+8$ 型数染成蓝色．

因为 $2050=8\times256+2$，所以 $k=0$，1，2，…，256.

构造 257 个抽屉，第 $k+1$ 个抽屉放置形如“$8k+1$，$8k+2$，$8k+3$，$8k+4$，$8k+5$，$8k+6$，$8k+7$，$8k+8$”的数，$k=0$，1，2，…，255．第 257 个抽屉放置 A 中大于 2048 的数(最多 2 个数)．

2050 个数中任取 2018 个数按要求放入抽屉，至少填满 224 个抽屉(放入了 8 个数)，224 个填满数的抽屉每个抽屉都是 4 个红数和 4 个蓝数，其和相等且平方和相等．

取 224 个抽屉中的 150 个，$4\times150=600$，共 600 个红数与 600 个蓝数，也有和相等，且平方和相等．

即存在 600 个红数与 600 个蓝数，这 600 个红数与 600m 个蓝数的和相等，且平方

和相等. ………………………… 20分

证明二： 注意到$4+5=1+2+6=9$，且$4^2+5^2=1^2+2^2+6^2=41$.

则 $7k+(7k+4)+(7k+5)=(7k+1)+(7k+2)+(7k+6)$，

且 $(7k)^2+(7k+4)^2+(7k+5)^2=(7k+1)^2+(7k+2)^2+(7k+6)^2$.

………………………… 10分

把A中的$7k$，$7k+3$，$7k+4$，$7k+5$型数染成红色，

$7k+1$，$7k+2$，$7k+6$型数染成蓝色.

因为$2050=7\times292+6$，所以$k=0$，1，2，…，292.

构造293个抽屉，$k=0$时，抽屉放置集合A中不超过6的数，其余的第$k+1$个抽屉放置形如$7k$，$7k+1$，$7k+2$，$7k+3$，$7k+4$，$7k+5$，$7k+6$型数，$k=1$，2，…，292.

2050个数中任取2018个数按要求放入抽屉，至少填满260个抽屉(放入了7个数)，260个填满数的抽屉中每个抽屉都是4个红数和3个蓝数. 取$7k$，$7k+4$，$7k+5$型3个红数和3个蓝数，其和相等且平方和相等.

取260个抽屉中的200个，$3\times200=600$，共600个红数与600个蓝数，也有和相等，且平方和相等.

即存在600个红数与600个蓝数，这600个红数与600个蓝数的和相等，且平方和相等.

………………………… 20分