

【第 20 题】

1、知识与能力要求：

(1) 知识层面：考察用导数研究函数的极值问题、导数的几何意义及不等式恒成立问题.

(1) 能力要求：学生要有较高的运算能力、分析问题和解决问题的能力，在解题过程中要学会用分类讨论、构造及放缩等思想方法解决问题.

2、主要存在问题及错因

第一问：本小问导数求对，得 1 分；单调性说明得 1 分；答案对得 1 分。错误主要在三方面：(1) 审题不清，题目中隐含条件 $a > 0$ 未看到，导致分类讨论，但没扣分；(2) 单调

性不说明；(3) 利用 $\begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f(x_0)=\frac{1}{e} \end{cases}$ 解方程组，但未检验 $x_0=1$ 是极大值点.

第二问：本小问大部分学生得 3 分，错误主要集中在三个方面：(1) 运算存在问题：分式函数的导数求错；(2) 书写不规范：主要是“曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 在 $x=x_0$ 处的切线互相垂直”这个条件不写，但没扣分；(3) 只猜根，不说明根的唯一性.

典型错例

第 (1) 问：错解 1：

错解 1: $f(x) = \frac{a - a \ln x}{x^2} \quad (x > 0)$
 $= \frac{a(1 - \ln x)}{x^2}$
① $a=0$ 时，不合题意
② 当 $a < 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ， $\ln x = 1$
 $\therefore x = e$
 $x \quad (0, e) \quad e \quad (e, +\infty)$
 $f'(x) \quad - \quad 0 \quad +$
 $f(x) \quad \searrow \quad \text{极大值} \quad \nearrow$
 $\therefore f(x)$ 极大值为 $f(e)$ ，无极大值
不合题意舍
③ 当 $a > 0$ 时，令 $f'(x) = 0$ ， $x = e$
 $x \quad (0, e) \quad e \quad (e, +\infty)$
 $f'(x) \quad + \quad 0 \quad -$
 $f(x) \quad \nearrow \quad \text{极大值} \quad \searrow$
 $f(x)$ 极大值为 $f(e)$
 $\therefore f(e) = \frac{a}{e} = \frac{1}{e}$
 $\therefore a = 1$
综上： $a = 1$

错解 2：

错解 2: $f'(x) = \frac{f(x) - \frac{a}{x}}{x^2} = \frac{\frac{a - a \ln x}{x^2} - \frac{a}{x}}{x^2} = \frac{a(1 - \ln x) - ax}{x^4}$
 $\therefore f'(x) = 0$
 $\frac{a(1 - \ln x) - ax}{x^4} = 0 \quad \ln x = 1 \quad x = e$
 $\therefore f(e) = \frac{a}{e} = \frac{1}{e}$
 $\therefore a = 1$

错解 3：

错解 3: $f'(x) = \frac{\frac{a}{x} - a \ln x}{x^2}$
设极大值为 x_0
 $\begin{cases} f'(x_0) = 0 \\ f(x_0) = \frac{1}{e} \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{x_0} - a \ln x_0 = 0 \\ \frac{a \ln x_0}{x_0} = \frac{1}{e} \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ x_0 = e \end{cases} \quad \therefore a = 1$

第(2)问:

Handwritten mathematical solution for the second question:

$$\begin{aligned}n1 \quad f(x) &= \frac{e^x \ln x}{x} \\f'(x) &= e \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} \\f'(x_0) &= e \cdot \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} \\g'(x) &= \frac{e^x - (x + \ln x) \cdot e^x}{(x^2)^2} = \frac{1 - x - \ln x}{e^x} = \frac{-x}{e^x} \\g'(x_0) &= \frac{-x_0}{e^{x_0}} \\\therefore f'(x_0) \cdot g'(x_0) &= -1 \\e \cdot \frac{1 - \ln x_0}{x_0^2} \cdot \frac{-x_0}{e^{x_0}} &= -1 \\e(1 - \ln x_0) &= e^{x_0} \cdot x_0 \quad x_0 = 1\end{aligned}$$

第三问: 几乎没有学生写出来, 本小问对学生的能力要求较高, 学生的难点是无法确定分类的标准.

3、教学策略:

本题虽是压轴题, 但第(1)问和第(2)问难度不大, 本次扬州市均分为 5.39 分, 从这次均分可以看出, 比前两次考试均分要高, 说明即使是压轴题我们也可以得 8 分, 以此来树立学生的信心.

建议在下一阶段的复习过程中, 首先让学生明白规范无处不在, 不仅三角和立几要规范, 每一道解答题都要规范, 书写时因果关系要明确; 其次要培养学生的争分意识, 即使最后一问也也要动笔去写, 还要不停灌输学生: “静心审题, 细心运算”; 最后, 各学校可以根据本校或本班情况, 就某一类问题, 譬如, “压轴题如何争分?” 进行适当的微专题.