江苏省仪征中学2019届高三（上）期中考试热身练习6

班级__________ 姓名__________ 学号__________ 评价__________

一、填空题：

1．复数$\dfrac{i^3}{1+i}$（i为 虚数单位）的虚部是___________.

2．已知集合$A=\{x\,|\,x=2k+1,k\in Z\}$，$B=\{x\,|\,0<log_2(x+1)<3,x\in R\}$，则$A\cap B$的子集个数是________.

3．函数$f(x)=ln(x+1)-\dfrac{2}{x}$的零点的个数为________.

4. 函数$y=\sqrt{\ln x}$的定义域是________________.

5．设向量$\vec{a}=(-2,1),\vec{b}=(\lambda,-1)$，若$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角为钝角，则$\lambda$的取值范围为__________.

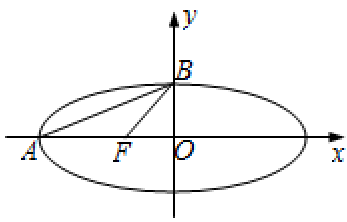
6．在平面直角坐标系xOy中，曲线$y=e^x+2x+1$在$x=0$处的切线方程是____________.

7．设函数$f(x)=\dfrac{k-2^x}{1+k\cdot 2^x}$，则“$k=-1$”是“函数$y=f(x)$为奇函数”的____________条件.

(选填“充分不必要、必要不充分、既不充分又不必要、充要”之一)

8．已知函数$f(x)=\sqrt{3}\sin\omega x+\cos\omega x(\omega>0), y=f(x)$的图象与直线$y=2$的两个相邻交点的距离等于$\pi$，则$f(-x)$的单调递增区间为___________.

9．如图，已知椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左顶点为$A$，左焦点为$F$，上顶点为$B$，若$\angle BAO+\angle BFO=90°$，则该椭圆的离心率是___________.



10．设$m,n\in R$，若直线$mx+ny-1=0$与x轴相交于点A，与y轴相交于点B，且l与圆$x^2+y^2=4$相交所得弦的长为2，O为坐标原点，则ΔABO面积的最小值为_____.

11．已知定义在R上的可导函数$y=f(x)$的导函数为$f'(x)$，满足$f'(x)<f(x)$，且$y=f(x+1)$为偶函数，$f(2)=1$，则不等式$f(x)<e^x$的解集为_____.

12．以C为钝角的△ABC中，BC=3，$\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}=12$，当角$A$最大时，△$ABC$面积为______.

二、解答题：

1、在 $\triangle ABC$ 中，角 A，B，C 所对的边分别为 a，b，c，已知 $\sqrt{3}\cos C-\sin C=\dfrac{\sqrt{3}b}{a}$.

⑴ 求 A 的大小；

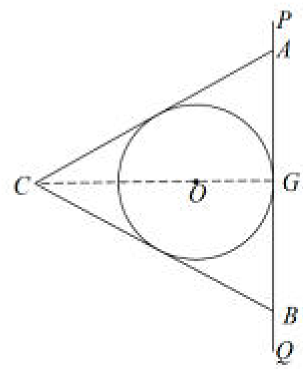
⑵ 若 $b+c=6$，D 为 BC 的中点，且 $AD=2\sqrt{2}$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

2、如图，PQ 为某公园的条道路，半径为 20 米的圆形观赏鱼塘与 PQ 相切，记其圆心为 O，切点为 G. 为参观方便，现新修建两条道路 CA、CB，分别与圆 O 相切于 D、E 两点，同时与 PQ 分别交于 A、B 两点，其中 C、O、G 三点共线且满足 $CA=CB$，记道路 CA、CB 长之和为 L.

⑴ ①设 $\angle ACO=\theta$，求出 L 关于 θ 的函数关系式 $L(\theta)$；

②设 $AB=2x$ 米，求出 L 关于 x 的函数关系式 $L(x)$.

⑵ 若新建道路每米造价一定，请选择 (1) 中的一个函数关系式，研究并确定如何设计使得新建道路造价最少.



三、附加题：

1. 已知矩阵 $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ a & 1\end{bmatrix}$，其中 $a\in\mathbf{R}$，若点 $P(1,1)$ 在矩阵 $\mathbf{A}$ 的变换下得到点 $P'(0,-3)$.

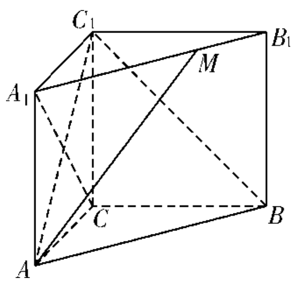
(1)求实数 a 的值；

(2)求矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值及特征向量.

2. 如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CA=4$，$CB=4$，$CC_1=2\sqrt{2}$，$\angle ACB=90°$，点 M 在线段 A_1B_1 上.

(1) 若 $A_1M=3MB_1$，求异面直线 AM 与 A_1C 所成角的余弦值；

(2) 若直线 AM 与平面 ABC_1 所成角为 30°，试确定点 M 的位置.



3. 已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F,直线 l 过点 $M(4,0)$.

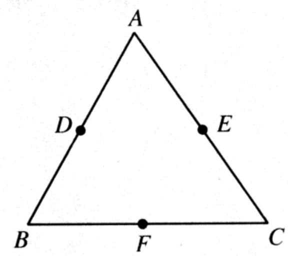
(1)若点 F 到直线 l 的距离为 $\sqrt{3}$,求直线 l 的斜率;

(2)设 A,B 为抛物线上两点,且 AB 不与 x 轴垂直,若线段 AB 的垂直平分线恰过点 M,求证:线段 AB 中点的横坐标为定值.

4. 如图,已知面积为 1 的正三角形 ABC 三边的中点分别为 D,E,F,从 A,B,C,D,E,F 六个点中任取三个不同的点,所构成的三角形的面积为 X(三点共线时,规定 $X=0$).

(1)求 $P\left(X\geqslant\dfrac{1}{2}\right)$;

(2)求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$.



热身练习 6 参考答案：

一、填空题：

1. $-\dfrac{1}{2}$；2.8；3.2；4. $\left(1,+\infty\right)$；5. $\left(-\dfrac{1}{2},2\right)\cup\left(2,+\infty\right)$；6.$y=3x+2$；7.充分不必要；8. $\left[k\pi+\dfrac{\pi}{6},k\pi+\dfrac{2}{3}\right]\left(k\in Z\right)$；

9. $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$； 10.3； 11. $\left(0,+\infty\right)$； 12.3.

二、解答题

1. 解:（1）由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$ 知 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sin B}{\sin A}$，所以 $\sqrt{3}\cos C-\sin C=\dfrac{\sqrt{3}\sin B}{\sin A}$，

即 $\sqrt{3}\sin A\cos C-\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin B$ …………2 分

所以 $\sqrt{3}\sin A\cos C-\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin\left(A+C\right)=\sqrt{3}\sin A\cos C+\sqrt{3}\cos A\sin C$，化简得

$\sin A\sin C=-\sqrt{3}\cos A\sin C$， …………4 分

因为 ΔABC 中， $\sin C>0$，所以 $\sin A=-\sqrt{3}\cos A$，即 $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=-\sqrt{3}$，

又 $A\in(0,\pi)$， 所以 $A=\dfrac{2\pi}{3}$ …………6 分

（2）因为 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$， …………8 分

所以 $\overrightarrow{AD}^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)^2=\dfrac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}^2\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left(b^2+2bc\cos A+c^2\right)=\dfrac{1}{4}\left(b^2-bc+c^2\right)=\dfrac{1}{4}\left[\left(b+c\right)^2-3bc\right]=8$，由 $b+c=6$，解得 $bc=\dfrac{4}{3}$ ……12 分

所以 ΔABC 的面积 $S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ …………14 分

（**说明**：用余弦定理处理的，仿此给分）

2. 解:（1）①在 $Rt\Delta CDO$ 中， $\angle ACO=\theta$，所以 $CO=\dfrac{20}{\sin\theta}$，所以 $CG=\dfrac{20}{\sin\theta}+20$ …………2 分

在 $Rt\Delta AGC$ 中 $AC=\dfrac{CG}{\cos\theta}=\dfrac{\dfrac{20}{\sin\theta}+20}{\cos\theta}=\dfrac{20+20\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$，所以 $L\left(\theta\right)=2AC=\dfrac{40+40\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}$ ……4 分

其中 $\theta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ …………5 分

②设 $AC=y$，则在 $Rt\Delta AGC$ 中 $CG=\sqrt{y^2-x^2}$，由 $Rt\Delta CDO$ 与 $Rt\Delta AGC$ 相似得，$\dfrac{CO}{CA}=\dfrac{OD}{AG}$，

即 $\dfrac{\sqrt{y^2-x^2}-20}{y}=\dfrac{20}{x}$，即 $x\sqrt{y^2-x^2}-20x=20y$，即 $x\sqrt{y^2-x^2}=20\left(x+y\right)$，即 $x\sqrt{y-x}=20\sqrt{x+y}$

即 $x^2\left(y-x\right)=400\left(x+y\right)$，化简得 $CA=y=\dfrac{x^3+400x}{x^2-400}$， $L\left(x\right)=2CA=\dfrac{2x^3+800x}{x^2-400}$ …………9 分

其中 $x\in\left(20,+\infty\right)$ …………10 分

（2）选择（1）中的第一个函数关系式 $L\left(\theta\right)=2AC=\dfrac{40+40\sin\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{40\left(1+\sin\theta\right)}{\sin\theta\cos\theta}$ 研究.

$$L'\left(\theta\right)=\frac{40\left[\cos\theta\sin\theta\cos\theta-\left(1+\sin\theta\right)\left(\cos^2\theta-\sin^2\theta\right)\right]}{\left(\sin\theta\cos\theta\right)^2}=\frac{40\left(\sin^3\theta+\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)}{\left(\sin\theta\cos\theta\right)^2}$$

$$=\frac{40\left(\sin^3\theta+2\sin^2\theta-1\right)}{\left(\sin\theta\cos\theta\right)^2}=\frac{40\left(\sin^3\theta+\sin^2\theta+\sin^2\theta-1\right)}{\left(\sin\theta\cos\theta\right)^2}=\frac{40\left(\sin\theta+1\right)\left(\sin^2\theta+\sin\theta-1\right)}{\left(\sin\theta\cos\theta\right)^2}$$

令 $L'\left(\theta\right)=0$，得 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. …………14 分

令 $\sin\theta_0=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$,当 $\theta\in(0,\theta_0)$ 时， $L'\left(\theta\right)<0$，所以 $L\left(\theta\right)$ 递减；

当 $\theta\in(\theta_0,\dfrac{\pi}{2})$ 时， $L'\left(\theta\right)>0$，所以 $L\left(\theta\right)$ 递增，所以当 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 时， $L\left(\theta\right)$ 取得最小值，新建道路何时造价也最少 …………16 分

（**说明**：本题也可以选择（1）中的第二个函数关系式 $L\left(x\right)=\dfrac{2x^3+800x}{x^2-400}$ 求解，仿此给分）

三、附加题：

1.

（1）由 $\begin{bmatrix}1 & -1\\ a & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix}$

得a+1=-3⇒a=-4.

（2）由（1）知A= $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}$

则矩阵A的特征多项式为

f（λ）= $\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1\\ 4 & \lambda-1\end{vmatrix}$=（$\lambda$-1）^{2}-4=$\lambda^2-2\lambda$-3

令f(λ)=0,得矩阵A的特征值为-1或3.

设矩阵A的特征向量为 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

当λ=-1时， $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$=(-1) $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$

即 $\begin{cases}x-y=-x\\-4x+y=-y\end{cases}$,所以y=2x.

∴矩阵A的属于特征值-1的一个特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$.

当λ=3时， $\begin{bmatrix}1 & -1\\ -4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$=3$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$,

即 $\begin{cases}x-y=3x\\-4x+y=3y\end{cases}$,所以2x+y=0.

∴矩阵A的属于特征值3的一个特征向量为 $\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix}$.

2.

解:(1)分别以CA、CB、CC_1为x、y、z轴,建立空间直角坐标系,如图所示

则$C(0,0,0)$, $A(4,0,0)$, $A_1(4,0,2\sqrt{2})$,

$B_1(0,4,2\sqrt{2})$

$\because A_1M=3MB_1$, $\therefore M(1,3,2\sqrt{2})$,

可得$\overrightarrow{A_1C}=(-4,0,-2\sqrt{2})$,

$\overrightarrow{AM}=(-3,3,2\sqrt{2})$,

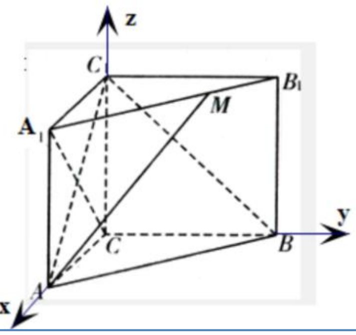
$\therefore cos<\overrightarrow{A_1C}$,

$\overrightarrow{AM}>=\dfrac{\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{A_1C}|\cdot|\overrightarrow{AM}|}=\dfrac{4}{\sqrt{24}\cdot\sqrt{26}}=\dfrac{\sqrt{39}}{39}$

所以异面直线AM与A_1C所成角的余弦值为

$\dfrac{\sqrt{39}}{39}$;

(2)由(1)得$B(0,4,0)$, $B_1(0,0,2\sqrt{2})$



$\therefore\overrightarrow{AB}=(-4,4,0)$, $\overrightarrow{AC_1}=(-4,0,2\sqrt{2})$

设$\overrightarrow{n}=(a,b,c)$是平面$ABC_1$的一个法向量,可得

$$\begin{cases}\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AB}=-4a+4b=0\\ \overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=-4a+2\sqrt{2}c=0\end{cases}$$,取$a=1$,得

$b=1$, $c=\sqrt{2}$

$\therefore\overrightarrow{n}=(1,1,\sqrt{2})$,而直线AM与平面$ABC_1$所成角为$30°$,

可得$\overrightarrow{AM}$与$\overrightarrow{n}$所成角为$60°$或$120°$

$\therefore|cos<\overrightarrow{AM}$、$\overrightarrow{n}>|=\dfrac{1}{2}$,设$A_1M=x$,则

$\overrightarrow{AM}=(x-4,4-x,2\sqrt{2})$

即

$$\frac{\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{AM}|\cdot|\overrightarrow{n}|}=\frac{1\cdot(x-4)+1\cdot(4-x)+\sqrt{2}\cdot2\sqrt{2}}{2\sqrt{(x-4)^2+(4-x)^2+8}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2(x-4)^2+8}}=\frac{1}{2}$$

解之得$\mathrm{x}=2$或6,由于M在A_1B_1上可得$x<6$,

故$A_1M=x=2$

即点M为线段A_1B_1的中点时,满足直线AM与平面ABC_1所成角为$30°$.

3.

(I)由已知,$x=4$不合题意.

设直线l的方程为$y=k(x-4)$,

由已知,抛物线C的焦点坐标为$(1,0)$

因为点F到直线l的距离为$\sqrt{3}$,

所以$\dfrac{|3k|}{\sqrt{1+k^2}}=\sqrt{3}$

解得$k=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,所以直线l的斜率为$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(II)设线段AB中点的坐标为$N(x_0,y_0)$,

$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,

因为AB不垂直于x轴,

则直线MN的斜率为$\dfrac{y_0}{x_0-4}$,

直线AB的斜率为$\dfrac{4-x_0}{y_0}$

直线AB的方程为$y-y_0=\dfrac{4-x_0}{y_0}(x-x_0)$

联立方程$\begin{cases}y-y_0=\dfrac{4-x_0}{y_0}(x-x_0)\\ y^2=4x\end{cases}$

消去x得

$(1-\dfrac{x_0}{4})y^2-y_0y+y_0^2+x_0(x_0-4)=0$

所以$y_1+y_2=\dfrac{4y_0}{4-x_0}$

因为N为AB中点,

所以$\dfrac{y_1+y_2}{2}=y_0$,即$\dfrac{2y_0}{4-x_0}=y_0$

所以$x_0=2$.

即线段AB中点的横坐标为定值2.

4.

解答: 解：（1）从六点中任取三个不同的点共有$C_6^3=20$个基本事件，

事件“$X\geq\frac{1}{2}$”所含基本事件有2×3+1=7，

从而$P(X\geq\frac{1}{2})=\frac{7}{20}$．（5分）

（2）X的取值为0，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，1，

P（X=0）$=\frac{3}{C_6^3}=\frac{3}{20}$；P（X=$\frac{1}{4}$）$=\frac{10}{20}$；P（X=$\frac{1}{2}$）$=\frac{6}{20}$；P（X=1）$=\frac{1}{20}$

分布列为：

X		$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1
P	$\frac{3}{20}$	$\frac{10}{20}$	$\frac{6}{20}$	$\frac{1}{20}$

则$E(X)=0\times\frac{3}{20}-\frac{1}{4}\times\frac{10}{20}-\frac{1}{2}\times\frac{6}{20}-1\times\frac{1}{20}=\frac{13}{40}$．

答：$P(X\geq\frac{1}{2})=\frac{7}{20}$，$E(X)=\frac{13}{40}$．（10分）