

21. 选修 4-2: 矩阵与变换

已知点 $M(2, 1)$ 在矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{bmatrix}$ 对应的变换作用下得到点 $N(5, 6)$, 求矩阵 A 的特征值.

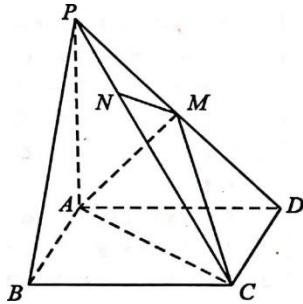
22. 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha, \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数). 以原点 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{10}$.

点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{10}$.

- (1) 求曲线 C 和直线 l 的普通方程;
- (2) 点 P 是曲线 C 上的动点, 求 P 到直线 l 的距离的最小值.

23. 如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=2$, $AD=AP=3$, 点 M 是棱 PD 的中点.



- (1) 求二面角 $M-AC-D$ 的余弦值;
- (2) 点 N 是棱 PC 上的点, 已知直线 MN 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{22}}{22}$, 求 $\frac{PN}{PC}$ 的值.

24. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=6$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n^2 - a_n + 3$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

- (1) 分别比较下列每组中两数的大小:

① a_2 和 $6 \times \left(\frac{3}{2}\right)$; ② a_3 和 $6 \times \left(\frac{3}{2}\right)^3$;

(2) 当 $n \geq 3$ 时, 证明: $\sum_{i=2}^n \left(\frac{a_i}{6}\right)^{\frac{2}{i}} > 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 3$.

21. 【选做题】本题包括 A, B, C 三小题, 请选定其中两题作答, 每小题 10 分共计 20 分, 解答时应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

A. 选修 4—2: 矩阵与变换

已知点 $M(2, 1)$ 在矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{bmatrix}$ 对应的变换作用下得到点 $N(5, 6)$, 求矩阵 A 的特

征值.

解: $\because$ 点 $M(2, 1)$ 在矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{bmatrix}$ 对应的变换作用下得到点 $N(5, 6)$,

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix}, \text{ 则 } \begin{cases} 2+a=5 \\ 2b+2=6 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}, \therefore A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix},$$

$$f(\lambda) = |\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4, \text{ 令 } f(\lambda) = 0,$$

得 $\lambda^2 - 3\lambda - 4 = 0$, 解得 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1$,

$\therefore$ 矩阵 A 的特征值为 4 或 -1.

22. 选修 4—4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}$ (α 为参数). 以原点 O

为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{10}$.

(1) 求曲线 C 和直线 l 的普通方程;

(2) 点 P 是曲线 C 上的动点, 求 P 到直线 l 的距离的最小值.

解: (1) 由题意, 曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,

直线 l 的普通方程为 $x + y - 2\sqrt{5} = 0$.

(2) 设 $P(2\cos\alpha, \sin\alpha)$, 则 P 到直线 l 的距离

$$d = \frac{|2\cos\alpha + \sin\alpha - 2\sqrt{5}|}{\sqrt{2}} = \frac{|\sqrt{5}\sin(\alpha + \theta) - 2\sqrt{5}|}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5} - \sqrt{5}\sin(\alpha + \theta)}{\sqrt{2}}$$

所以当 $\sin(\alpha + \theta) = 1$ 时, $d_{\min} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

所以 P 到直线 l 的距离的最小值为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

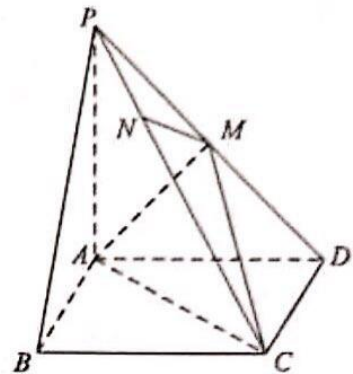
23. (本小题满分 10 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 是矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $AB=2$, $AD=AP=3$, 点 M 是棱 PD 的中点.

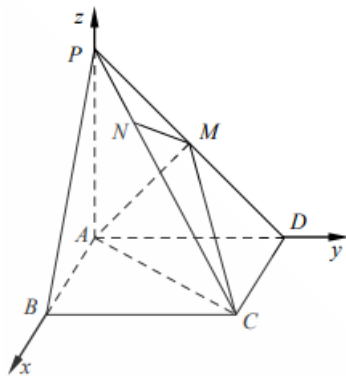
(1) 求二面角 $M-AC-D$ 的余弦值;

(2) 点 N 是棱 PC 上的点, 已知直线 MN 与平面 $ABCD$ 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{22}}{22}$, 求

$\frac{PN}{PC}$ 的值.



解: (1) 以 $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AP}\}$ 为正交基底建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$,



则各点的坐标为 $A(0, 0, 0)$, $B(2, 0, 0)$, $C(2, 3, 0)$, $D(0, 3, 0)$, $P(0, 0, 3)$,

$M(0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$,

$\overrightarrow{AP} = (0, 0, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 3, 0)$, $\overrightarrow{AM} = (0, \frac{3}{2}, \frac{3}{2})$

因为 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以平面 ACD 的一个法向量为 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 3)$,

设平面 MAC 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 所以 $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{cases}$,

$$\text{即} \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ \frac{3}{2}y + \frac{3}{2}z = 0 \end{cases}, \text{取 } \vec{n} = (3, -2, 2),$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{AP}, \vec{n} \rangle = \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}}{|\overrightarrow{AP}| |\vec{n}|} = \frac{6}{3\sqrt{9+4+4}} = \frac{2\sqrt{17}}{17},$$

$$\therefore \text{二面角 M-AC-D 的余弦值为 } \frac{2\sqrt{17}}{17};$$

(2) 设 $\overrightarrow{PN} = \lambda \overrightarrow{PC} (\lambda \in (0, 1))$, 其中 $\overrightarrow{PC} = (2, 3, -3)$,

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = (0, -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}) + (2\lambda, 3\lambda, -3\lambda) = (2\lambda, 3\lambda - \frac{3}{2}, -3\lambda + \frac{3}{2}),$$

$\therefore$ 平面 ABCD 的一个法向量为 $\overrightarrow{AP} = (0, 0, 3)$,

$$\begin{aligned} \therefore \cos \langle \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{MN} \rangle &= \frac{\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{MN}}{|\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{MN}|} = \frac{3(-3\lambda + \frac{3}{2})}{3\sqrt{4\lambda^2 + (3\lambda - \frac{3}{2})^2 + (-3\lambda + \frac{3}{2})^2}} \\ &= \frac{-3\lambda + \frac{3}{2}}{\sqrt{22\lambda^2 - 18\lambda + \frac{9}{2}}} \end{aligned}$$

$\therefore$ 直线 MN 与平面 ABCD 所成角的正弦值为 $\frac{3\sqrt{22}}{22}$,

$$\therefore \left| \frac{-3\lambda + \frac{3}{2}}{\sqrt{22\lambda^2 - 18\lambda + \frac{9}{2}}} \right| = \frac{3\sqrt{22}}{22}, \therefore \frac{(-3\lambda + \frac{3}{2})^2}{22\lambda^2 - 18\lambda + \frac{9}{2}} = \frac{9}{22},$$

$$\text{化简得 } 4\lambda = 1, \text{ 即 } \lambda = \frac{1}{4}, \therefore \frac{PN}{PC} = \frac{1}{4}.$$

24. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 6$, $a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n^2 - a_n + 3 (n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 分别比较下列每组中两数的大小: ① a_2 和 $6 \times \frac{3}{2}$; ② a_3 和 $6 \times (\frac{3}{2})^3$;

(2) 当 $n \geq 3$ 时, 证明: $\sum_{i=2}^n (\frac{a_i}{6})^{\frac{2}{i}} > 2(\frac{3}{2})^n - 3$.

解: (1) ① $\because a_2 = 9, 6 \times \frac{3}{2} = 9, \therefore a_2 = 6 \times \frac{3}{2}$;

② $\because a_3 = 21, 6 \times (\frac{3}{2})^3 = \frac{81}{4}, \therefore a_3 > 6 \times (\frac{3}{2})^3$;

(2) 先用数学归纳法证明: 当 $n \geq 3$ 时, $a_n > 6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

当 $n=3$ 时, $a_3 > 6 \times (\frac{3}{2})^3$;

假设当 $n=k$ ($k \geq 3, k \in \mathbb{N}^*$) 时, 结论成立, 即 $a_k > 6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{k(k-1)}{2}}$,

当 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{1}{3} a_k^2 - a_k + 3 > \frac{1}{3} (6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{k(k-1)}{2}})^2 - 6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{k(k-1)}{2}} + 3 \\ &> \frac{1}{3} (6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{k(k-1)}{2}})^2 - 6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{k(k-1)}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{其中 } \frac{a_{k+1}}{6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{k(k+1)}{2}}} > \frac{\frac{1}{3} (6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{k(k-1)}{2}})^2}{6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{k(k+1)}{2}}} - \frac{6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{k(k-1)}{2}}}{6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{k(k+1)}{2}}} = 2(\frac{3}{2})^{\frac{k(k-3)}{2}} > 1,$$

$\therefore a_{k+1} > 6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{k(k+1)}{2}}$, $\therefore$ 当 $n=k+1$ 时, 结论也成立,

综上所述, 当 $n \geq 3$ 时, $a_n > 6 \times (\frac{3}{2})^{\frac{n(n-1)}{2}}$,

从而, 当 $n \geq 3$ 时, $(\frac{a_n}{6})^{\frac{2}{n}} > (\frac{3}{2})^{n-1}$,

$$\text{则 } \sum_{i=2}^n \left(\frac{a_i}{6}\right)^{\frac{2}{i}} > \left(\frac{a_2}{6}\right)^{\frac{2}{2}} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},$$

$$= \frac{3}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}}{1 - \frac{3}{2}} = 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 3,$$

$$\therefore \text{当 } n \geqslant 3 \text{ 时, } \sum_{i=2}^n \left(\frac{a_i}{6}\right)^{\frac{2}{i}} > 2\left(\frac{3}{2}\right)^n - 3.$$

