

2020年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷模拟）

数学 I 试题

注意事项

考生在答题前请认真阅读本注意事项及各题答题要求

1. 本试卷共 4 页，均为非选择题（第 1 题-第 20 题，共 20 题）。本卷满分为 160 分。考试时间为 120 分钟。考试结束后，请将本试卷和答题卡一并交回。
2. 答题前请务必将自己的姓名用 0.5 毫米黑色墨水签字笔填写在试卷及答题卡的规定位置。
3. 作答试题，必须用 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上的指定位置作答，在其他位置作答一律无效。
4. 如需作图，须用 2B 铅笔绘，写清楚，线条，符号等须加黑加粗。
5. 请保持答题卡卡面清洁，不要折叠、破损。一律不准使用胶带纸、修正液、可擦洗的圆珠笔。

参考公式：

锥体体积公式： $V = \frac{1}{3}S \cdot h$ ，其中 S 为底面积， h 为高。

一、填空题（本大题共 14 个小题，每小题 5 分，共 70 分，将答案填在答题纸上。）

1. 已知集合 $M = \{1, 2\}$ ，且 $M \cup N = \{1, 2, 3\}$ ，则集合 N 的个数为_____。
2. 设复数 $z = 1 - mi$ (i 为虚数单位， $m \in \mathbb{R}$)，若 $z^2 = -2i$ ，则复数 z 的共轭复数为_____。
3. 盒子内装有一些大小相同的红球、白球和黄球，从中摸出 1 个球，摸出红球的概率是 0.27，摸出白球的概率是 0.36，则摸出黄球的概率是_____。
4. 某班有学生 48 人，现将所有学生随机编号，用系统抽样方法，抽取一个容量为 4 的样本，已知 5 号、29 号、41 号学生在样本中，则样本中还有一个学生的编号是_____。

5. 右图是一个算法流程图，则输出 k 的值是_____。

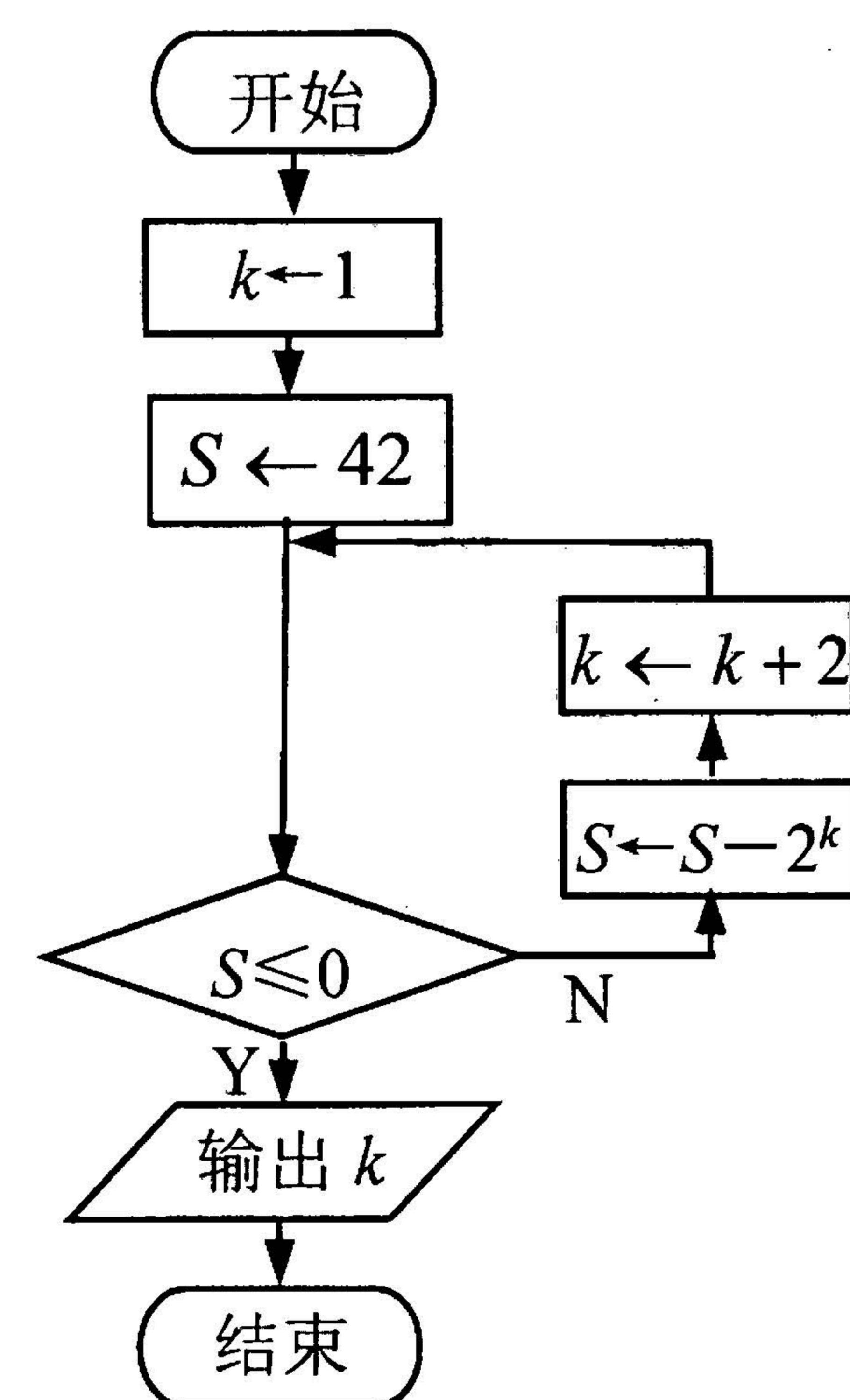
6. 定义在 \mathbb{R} 上的奇函数 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数，若 $f(2) = 0$ ，

则 $f(\log_2 x) \geq 0$ 的解集是_____。

7. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的右顶点为 A ，右焦点为 F ，

过 F 作双曲线其中一条渐近线的垂线，垂足为 P ，若 $\triangle PAF$ 为等腰三角形，则双曲线的离心率为_____。

8. 已知正三棱锥的底面边长为 2，若正三棱锥的侧面积是体积的 6 倍，则该正三棱锥的高为_____。



(第 5 题图)

9. 在正项等比数列 $\{a_n\}$ 中, S_n 为其前 n 项和, 已知 $3a_7 = 4S_5 + 2$, $a_8 = 4S_6 + 2$, 则该数列的公比 q 为_____.

10. 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \frac{\pi}{6})$ ($0 \leq x < \pi$), 且 $f(\alpha) = f(\beta) = \frac{1}{4}$ ($\alpha \neq \beta$), 则 $\alpha + \beta =$ _____.

11. 已知 $f(x)$ 为 R 上的偶函数, 且当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = m[(x-3)^2 - 1](m > 0)$, 若函数 $y = f(f(x))$ 恰有八个不同的零点, 则 m 的取值范围_____.

12. 已知等边 ΔABC 内接于圆 $O: x^2 + y^2 = 4$, 且 P 是圆 O 上一点, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot (\overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC})$ 的最大值是_____.

13. 已知正数 a, b 满足 $a + \frac{2}{a} + b + \frac{3}{b} = 4\sqrt{3}$, 则 $\frac{b}{a}$ 的取值范围是_____.

14. 已知函数 $f(x) = -x^2 e^{-x-a} + \ln x - a$, 若关于 x 的不等式 $f(x) \leq 0$ 恒成立, 则实数 a 的最小值是_____.

二、解答题 (本大题共 6 小题, 共 90 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

15. (本小题满分 14 分)

在 ΔABC 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知向量 $\vec{m} = (\cos A, \sqrt{2} \sin A)$,
 $\vec{n} = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$, 且 $\vec{m} \perp \vec{n}$.

(1) 求角 A 的值;

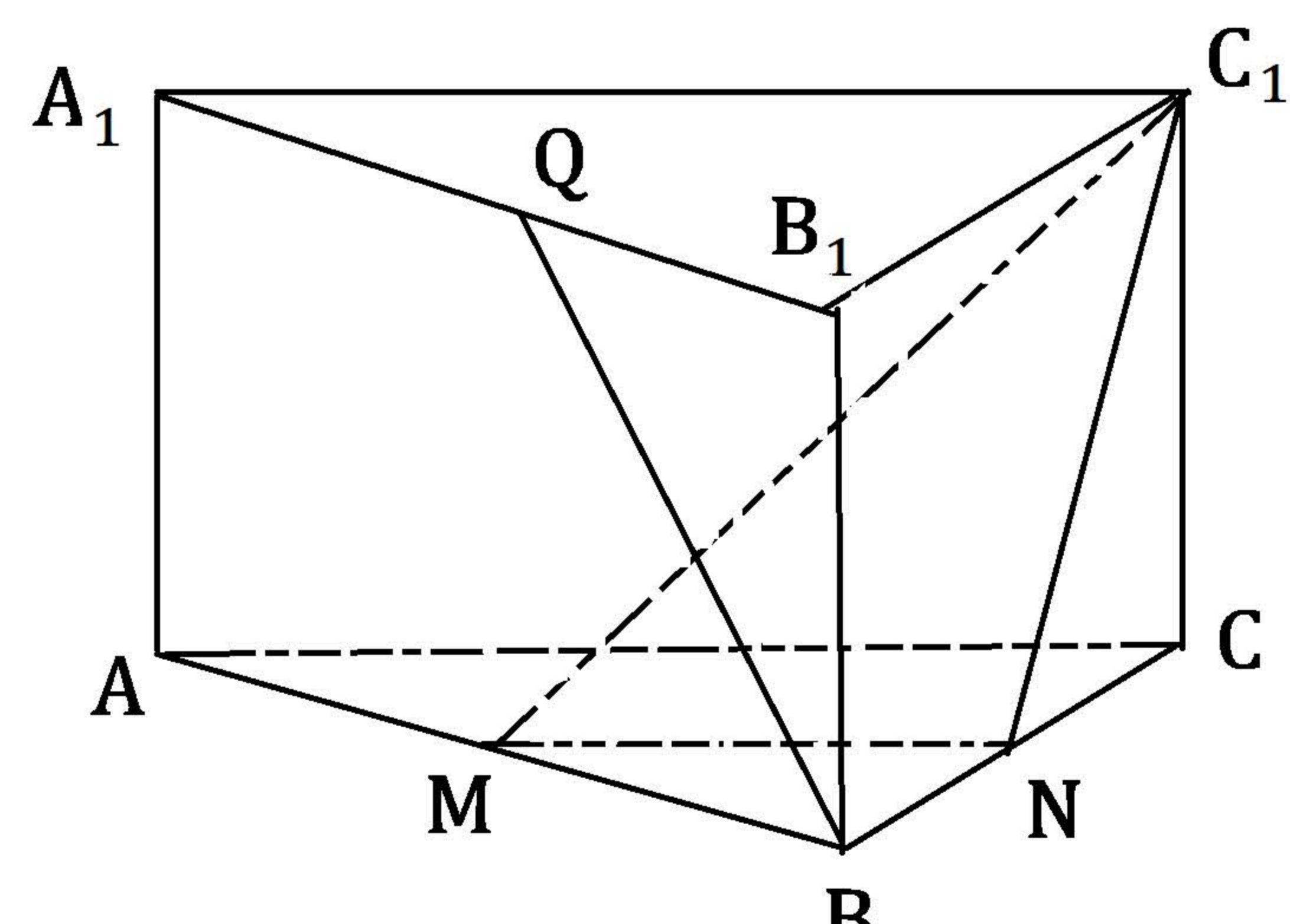
(2) 若 ΔABC 的外接圆的半径为 $\sqrt{2}$, 且 ΔABC 的面积为 2, 求角 B 的大小.

16. (本小题满分 14 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, M, N, Q 分别为棱 AB, BC, A_1B_1 的中点, 且 $AC = BC = 2, CC_1 = \sqrt{3}, C_1M = \sqrt{5}$.

(1) 求证: $BQ \parallel$ 平面 MNC_1 ;

(2) 求证: 平面 $MNC_1 \perp$ 平面 B_1BCC_1 .

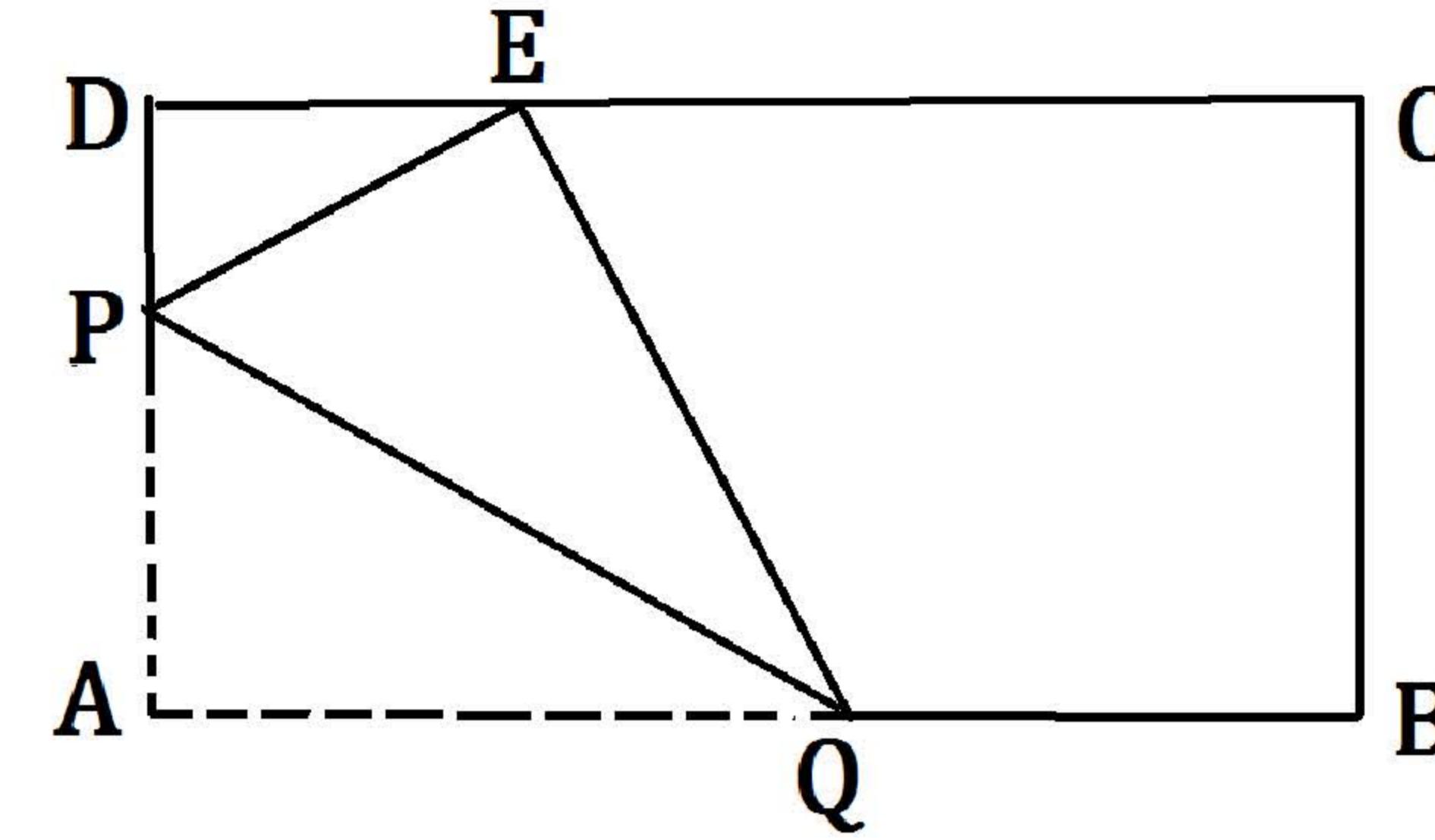


17. (本小题满分 14 分)

如图, 有一张矩形纸片 $ABCD$, 其中 $AB = 12 \text{ cm}$, $AD = 6 \text{ cm}$, 现折叠纸片, 使得点 A 落在边 CD 上的点 E 处, 折痕为 PQ (点 P 在边 AD 上, 点 Q 在边 AB 上).

(1) 若 $\angle APQ = \frac{\pi}{3}$, 求四边形 $APEQ$ 的面积;

(2) 求折痕 PQ 长度的最小值.



18. (本小题满分 16 分)

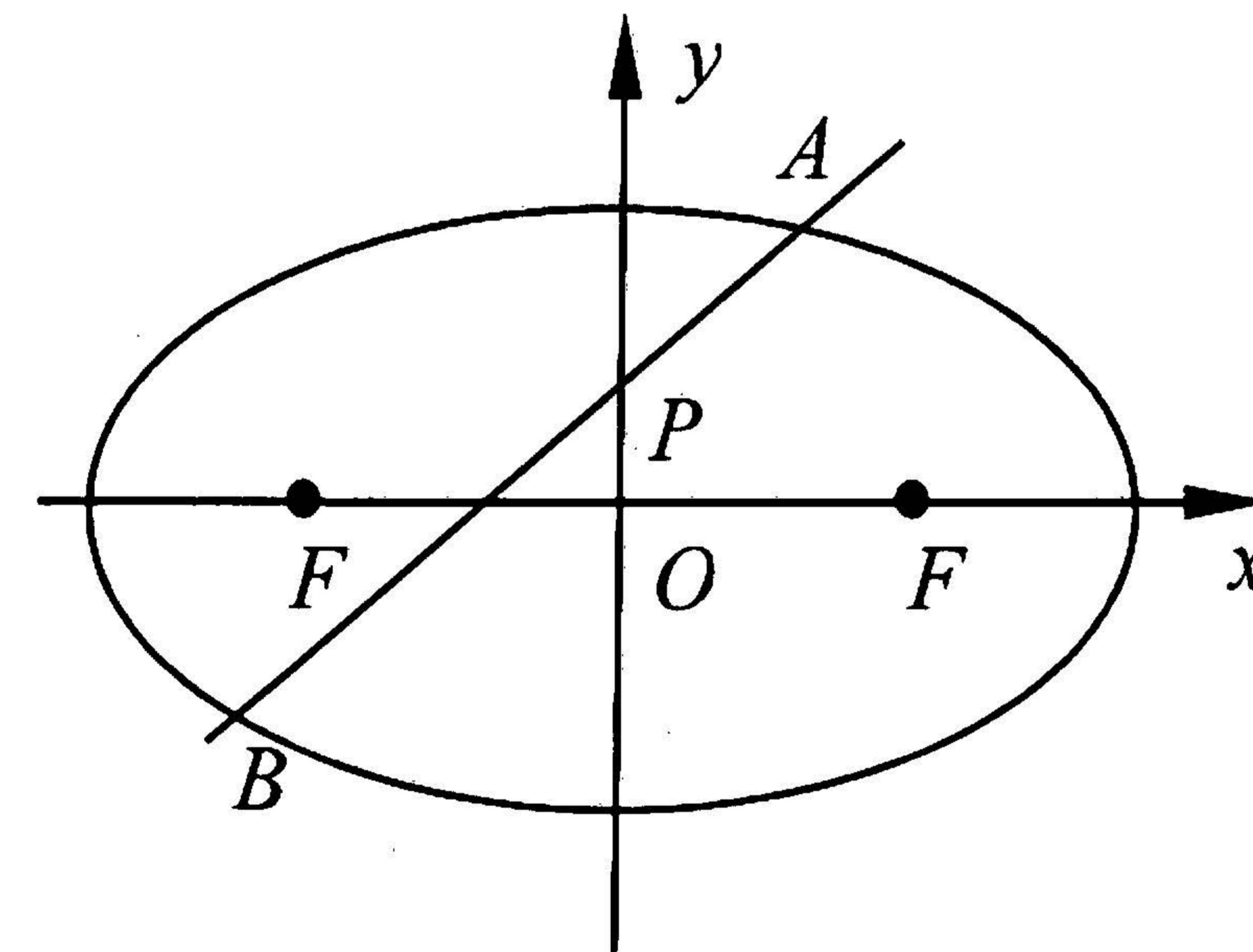
如图, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率是 $\frac{1}{2}$, 左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过点 $P(0,1)$

的动直线 l 与椭圆相交于 A, B 两点, 当直线 l 过 F_1 时, $\Delta F_2 AB$ 的周长为 8.

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 当 $\overrightarrow{PB} = 2\overrightarrow{AP}$ 时, 求直线 l 方程;

(3) 已知点 $M(0,3)$, 直线 MA, MB 的斜率分别为 k_1, k_2 . 问是否存在实数 λ , 使得 $k_1 + \lambda k_2 = 0$ 恒成立?



19. (本小题满分 16 分)

设函数 $f(x) = ax + \frac{1}{x} - b \ln x$ ($x > 0, a, b \in \mathbf{R}$) .

- (1) 当 $a = -1$ 时, 函数 $f(x)$ 为单调减函数, 则求实数 b 的取值范围;
- (2) 若 $a + b = 1$, 函数 $f(x)$ 的最小值为 2, 求 a 的值;
- (3) 对于任意给定的正实数 a, b , 证明: 存在实数 x_0 , 当 $x > x_0$ 时, $f(x) > 0$.

20. (本小题满分 16 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $pS_n = a_n a_{n+1} - 6$ ($n \in \mathbf{N}^*$, p 为常数), 且 $a_1 = 2$, $S_3 = 13$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 是否存在正整数 s, t, k ($s < t < k$), 使得 a_s, a_t, a_k 成等比数列, 且 s, t, k 成等差数列?
若存在, 求出所有的有序数组 (s, t, k) ; 若不存在, 请说明理由.

绝密★启用前

2020年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷模拟）

数学 II (附加题)

21. 【选做题】本题包括 A、B、C 三个小题，请选定其中两个小题，并在相应的答题区域内作答，若多做，则按作答的前两小题评分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

A. 【选修 4-2：矩阵与变换】(本小题满分 10 分)

已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, 若矩阵 $M = BA$, 求矩阵 M 的逆矩阵 M^{-1} .

B. 【选修 4-4：坐标系与参数方程】(本小题满分 10 分)

以坐标原点为极点， x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 极坐标方程为

$\rho = 4\sin\theta$, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ (t 为参数)，设直线 l 与曲线 C 相交于 A , B 两点，求线段 AB 的长。

C. 【选修 4-5：不等式选讲】(本小题满分 10 分)

已知函数 $f(x) = \sqrt{3x+12} + \sqrt{12-x}$, 求函数 $f(x)$ 的最大值。

【必做题】(第 22 题、第 23 题, 每题 10 分, 共 20 分. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

22. 一个质地均匀的小正方体的六个面中, 由四个面标有数字 1, 两个面标有数字 2. 将该校正方体连续抛掷三次, 记下向上一面上的数字.

- (1) 求抛掷三次记下的数字不全相同的概率;
- (2) 设 ξ 表示抛掷三次记下的数字之和, 求 ξ 的分布列和数学期望 $E(\xi)$.

23. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, $a_{n+1} = a_n - a_n^2$.

- (1) 求证: $a_n \leq \frac{1}{2}$;
- (2) 求证: $a_{n+1} \geq \frac{1}{2n+2}$.