简单题在高考数学备考中的作用解析

赵国梁

（甘肃省兰州市新区舟曲中学 730087）

摘 要：以一道直线和抛物线相交简单例题为例来说明如何构建高三学生的知识体系、提高学生解题方法、训练学生数学思维.

关键词：简单题；高考数学；作用；数学思维

在高三复习的过程中，大多数学生总是处于做题－对答案－做题这种循环中，在复习中做题固然重要，更重要的是研究题目考察的数学知识、数学思想、解题方法.很多学生尤其是高三学生更愿意关注答案的正确与否、做出难题的喜悦.但是对于一道数学题做出正确答案不去思考有没有其它更好的解法，导致学生在知识点的生成、应用在解题方法中白白浪费了一次训练机会.对于高三学生来说数学题是做不完的，他们更应该关注知识点的完整和解题方法的熟练掌握、思维的生成.这些不一定都需要难题来进行训练，简单题也可以.现在就以高三数学学科复习中的一道直线与圆锥曲线相交后求弦长问题为例来说明解题思路的生成和升华.

1 题目呈现

例 如图1，已知抛物线 $y^2=4x$，直线 $l:y=x-1$ 与抛物线交于 A,B 两点，求线段 AB 的长.

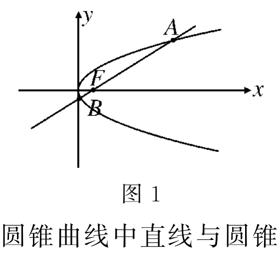

图1

这是一道圆锥曲线中直线与圆锥曲线相交后的求弦长问题.很多学生拿到这道题都嫌简单而不认真对待，他们解决此问题时仅限于解出来，不再去思考方法的优劣和思维的提升.

2 解法分析

解法1 直接法.设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由

$$\begin{cases}y^2=4x,\\ y=x-1,\end{cases}$$

消 y 得

$$x^2-6x+1=0,$$

解得 $x_1=3+2\sqrt{2}$，$x_2=3-2\sqrt{2}$.

由此可得 $A(3+2\sqrt{2},2+2\sqrt{2})$，$B(3-2\sqrt{2},2-2\sqrt{2})$.再根据两点间的距离公式得 $|AB|=8$.

这种解法很自然很原始，线段长为线段两端点之间的距离，只要知道线段两端点的坐标再根据两点间的距离公式来求线段长度，线段两端点是直线与抛物线的交点，只需联立两方程即可求解.此种方法虽然思维要求低但是运算量较大，往往有些题中不能直接解出交点的坐标，从而迫使要寻找更加简单的方法.

解法2 弦长公式法.

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由

$$\begin{cases}y^2=4x,\\ y=x-1,\end{cases}$$

消 y 得

$$x^2-6x+1=0,$$

所以 $x_1+x_2=6$，$x_1x_2=1$.

由弦长公式得 $|AB|=8$.

这种方法是在方法1的基础之上考虑到将 A 点和 B 点坐标的未知量由4个能不能转化为更少，考虑到 A、B 点是曲线和直线的交点，故要满足曲线和直线方程，为了运算简单带入直线方程中用 x 来表示 y 或者用 y 来表示 x，从而得到了直线和圆锥曲线相交后弦长公式

$$\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|,$$

收稿日期：2020-06-02

再利用两根之和与两根之积表示为

$$\sqrt{(1+k^2)[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}$$

$$=\sqrt{(1+\frac{1}{k^2})[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}.$$

相比较法 1 用两根之和、两根之积来表示弦长，这样就省了直接去计算 4 个未知量以及用两个未知量之和、之积来进行运算，减少了运算也就减少了出错的机会，这种方法是在第一种方法上的升华，完完整整体现了圆锥曲线中的八字方针“设而不求，整体代换”的思想. 这种计算弦长方法在圆锥曲线中是最基本的一种运算方法.

解法 3　定义法.

由直线方程中可得直线过点(1,0)，而抛物线的焦点也为(1,0). 设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，由

$$\begin{cases} y^2=4x, \\ y=x-1, \end{cases}$$

消 y 得

$$x^2-6x+1=0,$$

所以 $x_1+x_2=6$.

由抛物线定义得

$$|AB|=x_1+x_2+2=8.$$

此方法观察到了直线过了抛物线的焦点，从而联想到抛物线的定义. 从图中可知 $|AB|=AF+BF$，再由抛物线定义知 $AF=x_1+\frac{p}{2}$，$BF=x_2+\frac{p}{2}$，可得 $|AB|=x_1+x_2+p$，而 x_1+x_2 的计算也要用到圆锥曲线中的八字方针. 这就需要学生对抛物线的定义熟悉并且要有敏锐的观察力.

解法 4　二级定理法. 由直线方程 $y=x-1$ 可得直线斜率为 1，倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$. 再由直线过抛物线的焦点与抛物线相交后弦长 $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\alpha}$（$\alpha$ 为 AB 所在直线的倾斜角）的公式可得

$$|AB|=\frac{4}{\sin^2\frac{\pi}{4}}=8.$$

这种方法是过抛物线焦点与抛物线相交后计算弦长，注意过抛物线焦点这个条件，公式是方法 3 的基础上进行推导而来，具体如下：

$$\begin{cases} y^2=2px, \\ y=k(x-\frac{p}{2}), \end{cases}$$

消 y 得

$$k^2x^2-(k^2p+2p)x+\frac{k^2p^2}{4}=0,$$

则　$x_1+x_2=\frac{k^2p+2p}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{p^2}{4}$，

$$|AB|=x_1+x_2+p=\frac{k^2p+2p}{k^2}+p$$

$$=\frac{2k^2p+2p}{k^2}=2p(1+\frac{1}{k^2})$$

$$=2p(1+\frac{1}{\tan^2\alpha})=2p(1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha})=\frac{2p}{\sin^2\alpha}.$$

这种方法也是抛物线的焦点弦的二级结论，它是对解法 3 的一种升华，如果在选择和填空中出现这种问题，直接可以用二级结论进行解题. 与之有关的为焦点三角形面积公式.

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot d_{o-l}\cdot|AB|$$

$$=\frac{1}{2}(|OF|\cdot\sin\alpha)\cdot|AB|$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}\cdot\sin\alpha\cdot\frac{2p}{\sin^2\alpha}=\frac{p^2}{\sin^2\alpha}.$$

解法 5　参数方程法.

由直线方程 $y=x-1$ 可得直线过了(1,0)点和倾斜角为 $\frac{\pi}{4}$，所以直线的参数方程为

$$\begin{cases} x=1+\frac{\sqrt{2}}{2}t, \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t, \end{cases}\quad(t\text{ 为参数})$$

把它带入抛物线方程，得

$$t^2-4\sqrt{2}t-8=0,$$

解得　$t_1=2\sqrt{2}+4$，$t_2=2\sqrt{2}-4$.

由参数的几何意义得

$$|AB|=|t_1-t_2|=8.$$

此种方法是由直线的参数方程的参数几何意义可得. 还可以用 $|AB|=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$ 用韦达定理进行设而不求. 另外在高中阶段计算长度往往还可以用向量或者极坐标系.

3　作用解析

同样一道简单的数学题,如果学生从不同的方法进行求解,步步为营,层层推进,思维会进一步提高,这样有助于提高自己备考中的知识储备和方法技能.这也符合高中数学课程目标,能够考察到学生必需的数学基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验,也训练了学生发现问题、解决问题的能力.[1]在高三备考过程中多应用这样简单的例题会起到意想不到的效果.

3.1 完善知识体系

在高三备考中,尤其是第一轮复习过后,学生面对诸多的定义、公式、公理等感觉无从下手,尤其对于基础比较差的同学花大量的时间去记忆它们,经常出现过两天就忘记的情况,或者就根本不会用这些定义、公式、公理等.选择有针对性的简单题让学生进行训练,学生在一遍一遍做的过程中,可以将这些看似无关、零散的内容加以整合,逐步的构建和完善自己的知识体系,也可以让基础差的学生感受到做对题的乐趣,增加学生学习的积极性.

3.2 提高解题能力

波利亚在《怎样解题》中指出,你曾经是否见过相同的题目以一种稍有不同的形式出现吗?你能想起一道与它有关的题目吗?你能想起一条和它相关的定理吗?观察未知数!并尽可能想出一道你所熟悉的相同或相似的题目.如果能想起有一道题目和你现有的题目有关而且以前能做对.你能利用它吗?试指出一个具有相同条件或相似条件的熟悉的题目.这里有一个与你现在的题目有联系且早已解决的题目.你可不可以利用它?你能利用它的结果吗?[2]要想解题就得要有一定的积累,这需要学生对基础知识、解题的基本方法等进行一定量的训练来进行积累.像文中考查到多个方面的简单题是训练学生最好的题,通过对这些简单题的积累慢慢可以尝试去解决一些相对难点的题.

3.3 训练数学思维

高考备考中简单题学生更容易做出来,最好类似于文中这样能够一题多解的简单题,这种题更多侧重点在解法中,不同的解法需要学生从不同的角度、思路去分析.在分析的过程中完全能够对高中基本的数学思想和方法进行再次梳理,在比较这些方法中也能找出解决此类问题的最有效的方法,培养了学生思维的灵活性.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018.

[2] [美]G·波利亚.怎样解题[M].涂泓,冯承天,译.上海:上海科技教育出版社,2007.

(上接第45页)

学基本思想,让学生理解数学知识的本质,形成对知识的悟性,提高学生的数学思维品质及分析问题与解决问题的能力.在数学教学中立足知识与技能,突显思维与表达,强化交流与反思.

参考文献

[1] 中华人民共和国教育部.教育部关于全面深化课程改革落实立德树人根本任务的意见[J].师资建设,2014(6):17-20.

[2] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准(2017年版)[M].北京:人民教育出版社,2018:1.

[3] 喻平.数学核心素养评价的一个框架[J].数学教育学报,2017,26(2):19-23,59.

[4] 李华,胡典顺.基于数学核心素养评价框架的试卷测评研究——以2019年高考全国卷为例[J].数学教育学报,2020,29(2):18-23.

[5] 任子朝,赵轩.高考试题创新设计的研究与实践[J].中学数学教学参考,2019(19):2-5,11.

[6] 罗文军,刘娟娟.2019年高考全国Ⅱ卷数学试题评析和2020年备考建议[J].中学数学杂志,2019(9):48-50.

[7] 白兴宏,张炳意.基于数学学科核心素养视角的高考数学试题分析——以2018年全国Ⅱ卷高考数学试题为例[J].数学教学研究,2019,38(2):52-55.

[8] 张畅畅.数学文化在高考真题中的渗透——以2019年高考真题为例[J].数学学习与研究,2020(8):3,5.

[9] 俞梦飞,章飞.核心素养视角下数学高考试卷评价研究——以2018和2019年江苏高考卷为例[J].数学教育学报,2020,29(2):35-40.

[10] 李作滨.2018年13套高考数学试卷审思:基于核心素养的视角[J].教育测量与评价,2019(4):51-57,64.