微课一　构造函数证明不等式

题型一　移项构造函数证明不等式

【例 1】已知函数 $f(x)=x^2e^{2x-2}$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点$(1，f(1))$处的切线方程；

(2)当 $x\in[0，2]$时，求证：$f(x)\geqslant-2x^2+8x-5$.

【训练 1】证明：当 $x>1$ 时，$\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$.

题型二　放缩后构造函数证明不等式

【例 2】(2020 南京调研)已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$.

(1)设 $x=2$ 是 $f(x)$的极值点，求 a，并求 $f(x)$的单调区间；

(2)证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant0$.

【训练 2】已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a\ln x}{x^2}$.

(1)若 $a=1$，求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $a=0$，$x\in(0，1)$，证明：$x^2-\frac{1}{x}<\frac{f(x)}{e^x}$.

题型三　分拆函数法证明不等式

【例 3】(2021·百校大联考)已知函数 $f(x)=e\ln x-ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)当 $a=e$ 时，证明：$xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$.

【训练 3】已知函数 $f(x)=e^x\ln x+\frac{2}{x}e^{x-1}$，证明：$f(x)>1$.

微课二　“双变量”问题的转化

【例 1】(2021·重庆调研)已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(a-b-1)x+b+1(a，b\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=0$，试讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $0<a<2$，$b=1$，实数 x_1，x_2 为方程 $f(x)=m-ax^2$ 的两个不等实根，求证：$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>4-2a$.

【例 2】(2020·成都调研)已知函数 $f(x)=(x+a)\,e^{-x}$，若曲线 $y=f(x)$在点$(0，f(0))$处的切线与直线 $y=x-2$ 平行.

(1)求实数 a 的值；

(2)如果 $0<x_1<x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$3x_1+x_2>3$.

微课一　构造函数证明不等式

题型一　移项构造函数证明不等式

【例 1】已知函数 $f(x)=x^2e^{2x-2}$.

(1)求曲线 $y=f(x)$在点(1，$f(1)$)处的切线方程；

(2)当 $x\in[0，2]$时，求证：$f(x)\geqslant -2x^2+8x-5$.

(1)**解**　$f'(x)=2e^{2x-2}(x^2+x)$，$f'(1)=4$，$f(1)=1$，则曲线 $y=f(x)$在点(1，1)处的切线方程为 $y-1=4(x-1)$，即 $y=4x-3$.

(2)**证明**　当 $x\in[0，2]$时，令 $g(x)=x^2e^{2x-2}+2x^2-8x+5$，则 $g'(x)=2e^{2x-2}(x^2+x)+4x-8$，

令 $h(x)=g'(x)$，则 $h'(x)=2e^{2x-2}(2x^2+4x+1)+4>0$，

所以 $g'(x)$在[0，2]上单调递增，且 $g'(1)=0$，

所以 $g(x)$在[0，1]上单调递减，在(1，2]上单调递增，

所以 $g(x)$的最小值为 $g(1)=0$，所以 $g(x)\geqslant 0$，

即 $f(x)\geqslant -2x^2+8x-5$.

感悟升华　待证不等式的两边含有同一个变量时，一般地，可以直接构造“左减右”或“右减左”的函数，利用研究其单调性等相关函数性质证明不等式.

【训练 1】证明：当 $x>1$ 时，$\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$.

证明　设 $g(x)=\frac{2}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\ln x$，

则 $g'(x)=2x^2-x-\frac{1}{x}$，

因为当 $x>1$ 时，$g'(x)=\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x}>0$，

所以 $g(x)$在(1，$+\infty$)上是增函数，

所以当 $x>1$ 时，$g(x)>g(1)=\frac{1}{6}>0$，

所以当 $x>1$ 时，$\frac{1}{2}x^2+\ln x<\frac{2}{3}x^3$.

题型二　放缩后构造函数证明不等式

【例 2】(2020 南京调研)已知函数 $f(x)=ae^x-\ln x-1$.

(1)设 $x=2$ 是 $f(x)$的极值点，求 a，并求 $f(x)$的单调区间；

(2)证明：当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant0$.

(1)**解**　$f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$，$f'(x)=ae^x-\frac{1}{x}$.

由题设知，$f'(2)=0$，所以 $a=\frac{1}{2e^2}$.

从而 $f(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\ln x-1$，$f'(x)=\frac{1}{2e^2}e^x-\frac{1}{x}$.

当 $0<x<2$ 时，$f'(x)<0$；当 $x>2$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $f(x)$的单调递减区间为$(0，2)$，单调递增区间为$(2，+\infty)$.

(2)**证明**　当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant\frac{e^x}{e}-\ln x-1(x>0)$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{e}-\ln x-1(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{e^x}{e}-\frac{1}{x}(x>0)$.

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$.

所以 $x=1$ 是 $g(x)$的极小值点，也是最小值点.

故当 $x>0$ 时，$g(x)\geqslant g(1)=0$.

因此，当 $a\geqslant\frac{1}{e}$时，$f(x)\geqslant0$.

感悟升华　某些不等式，直接构造不易求最值，可利用条件与不等式性质，适当放缩后，再构造函数进行证明.

【训练 2】已知函数 $f(x)=\ln x-\frac{a\ln x}{x^2}$.

(1)若 $a=1$，求 $f(x)$的单调区间；

(2)若 $a=0$，$x\in(0，1)$，证明：$x^2-\frac{1}{x}<\frac{f(x)}{e^x}$.

(1)**解**　当 $a=1$ 时，$f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x^2}$，$x\in(0，+\infty)$，

$\therefore f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1-2\ln x}{x^3}=\frac{x^2-1+2\ln x}{x^3}$

$=\frac{(x-1)(x+1)+2\ln x}{x^3}$.

当 $x\in(0，1)$时，$f'(x)<0$，当 $x\in(1，+\infty)$时，$f'(x)>0$，

$\therefore f(x)$的单调递减区间为$(0，1)$，单调递增区间为$(1，+\infty)$.

(2)**证明**　当 $a=0$，$x\in(0,1)$时，$x^2-\frac{1}{x}<\frac{f(x)}{e^x}$等价于$\frac{-\ln x}{e^x}+x^2-\frac{1}{x}<0$，

∵当 $x\in(0,1)$时，$e^x\in(1,e)$，$-\ln x>0$，∴$\frac{-\ln x}{e^x}<-\ln x$，

∴只需要证$-\ln x+x^2-\frac{1}{x}<0$在$(0,1)$上恒成立.

令 $g(x)=-\ln x+x^2-\frac{1}{x}$，$x\in(0,1)$，

∴$g'(x)=-\frac{1}{x}+2x+\frac{1}{x^2}=\frac{2x^3-x+1}{x^2}>0$，

则函数 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，于是 $g(x)<-\ln 1+1-1=0$，

∴当 $x\in(0,1)$时，$x^2-\frac{1}{x}<\frac{f(x)}{e^x}$.

题型三　分拆函数法证明不等式

【例 3】(2021·百校大联考)已知函数 $f(x)=e\ln x-ax(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$的单调性；

(2)当 $a=e$ 时，证明：$xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$.

(1)**解**　$f'(x)=\frac{e}{x}-a(x>0)$，

①若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增；

②若 $a>0$，则当 $0<x<\frac{e}{a}$时，$f'(x)>0$；

当 $x>\frac{e}{a}$时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$在$\left(0,\frac{e}{a}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{e}{a},+\infty\right)$上单调递减.

(2)**证明**　因为 $x>0$，所以只需证 $f(x)\leqslant\frac{e^x}{x}-2e$，

当 $a=e$ 时，由(1)知，$f(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减.

所以 $f(x)_{\max}=f(1)=-e$.

设 $g(x)=\frac{e^x}{x}-2e(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{(x-1)e^x}{x^2}$，

所以当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$，$g(x)$单调递减；

当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，$g(x)$单调递增，

所以 $g(x)_{\min}=g(1)=-e$.

综上，当 $x>0$ 时，$f(x)\leqslant g(x)$，即 $f(x)\leqslant\frac{e^x}{x}-2e$.

即 $xf(x)-e^x+2ex\leqslant 0$ 得证.

感悟升华　1.若直接求导比较复杂或无从下手时，可将待证式进行变形，构造两个函数，从而找到可以传递的中间量，达到证明的目标.

2.在证明过程中，等价转化是关键，此处 $g(x)_{\min}\geqslant f(x)_{\max}$ 恒成立，从而 $f(x)\leqslant g(x)$ 恒成立.

【训练 3】已知函数 $f(x)=e^x\ln x+\frac{2}{x}e^{x-1}$，证明：$f(x)>1$.

证明　函数 $f(x)$的定义域为$(0，+\infty)$.

$f(x)>1$ 等价于 $x\ln x>xe^{-x}-\frac{2}{e}$.

设函数 $g(x)=x\ln x$，则 $g'(x)=1+\ln x(x>0)$，

所以当 $x\in\left(0，\frac{1}{e}\right)$时，$g'(x)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{e}，+\infty\right)$时，$g'(x)>0$.

故 $g(x)$在$\left(0，\frac{1}{e}\right)$上单调递减，在$\left(\frac{1}{e}，+\infty\right)$上单调递增，从而 $g(x)$在$(0，+\infty)$上的最小值为 $g\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$.

设函数 $h(x)=xe^{-x}-\frac{2}{e}$，则 $h'(x)=e^{-x}(1-x)$，

所以当 $x\in(0，1)$时，$h'(x)>0$；

当 $x\in(1，+\infty)$时，$h'(x)<0$.

故 $h(x)$在$(0，1)$上单调递增，在$(1，+\infty)$上单调递减，

从而 $h(x)$在$(0，+\infty)$上的最大值为 $h(1)=-\frac{1}{e}$.

因为 $g(x)_{\min}=g\left(\frac{1}{e}\right)=h(1)=h(x)_{\max}$，

所以当 $x>0$ 时，$g(x)>h(x)$，即 $f(x)>1$.

微课二　“双变量”问题的转化

近年高考应考，常涉及“双变量”或“双参”相关问题，能力要求高，破解问题的关键：一是转化，即由已知条件入手，寻找双变量满足的关系式，并把含双变量问题转化为含单变量的问题，二是巧妙构造函数，再借用导数，判断函数的单调性，从而求其最值.

【例 1】(2021·重庆调研)已知函数 $f(x)=\ln x-ax^2+(a-b-1)x+b+1(a，b\in\mathbf{R})$.

(1)若 $a=0$，试讨论 $f(x)$的单调性；

(2)若 $0<a<2$，$b=1$，实数 x_1，x_2 为方程 $f(x)=m-ax^2$ 的两个不等实根，求证：$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>4-2a$.

(1)**解**　依题意知 $x>0$，当 $a=0$ 时，$f'(x)=\frac{1}{x}-(b+1)$，

①当 $b\leqslant-1$ 时，$f'(x)>0$ 恒成立，$f(x)$在$(0，+\infty)$上单调递增.

②当 $b>-1$ 时，$x\in\left(0，\frac{1}{b+1}\right)$时，$f'(x)>0$；

当 $x\in\left(\frac{1}{b+1}，+\infty\right)$时，$f'(x)<0$.

故 $f(x)$在$\left(0，\frac{1}{b+1}\right)$上单调递增，在$\left(\frac{1}{b+1}，+\infty\right)$上单调递减.

(2)**证明**　由 $f(x)=m-ax^2$ 得 $\ln x+(a-2)x+2-m=0$，

令 $g(x)=\ln x+(a-2)x+2$，$x>0$，

则 $g(x_1)=g(x_2)=m$，

依题意有 $\ln x_1+(a-2)x_1=\ln x_2+(a-2)x_2$.

$\therefore a-2=\frac{\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_1-x_2}(x_1\neq x_2，且\ x_1，x_2>0)$.

要证$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>4-2a$，

只需证$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}>2(2-a)=\frac{-2\ln\frac{x_2}{x_1}}{x_1-x_2}(*)$，

不妨设 $x_2>x_1>0$.

要证(*)式成立，只要证$\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}<-2\ln\frac{x_2}{x_1}$,

即证 $2\ln\frac{x_2}{x_1}+\frac{x_1}{x_2}-\frac{x_2}{x_1}<0$.

令 $t=\frac{x_2}{x_1}(t>1)$，则 $h(t)=2\ln t-t+\frac{1}{t}$.

$\because h'(t)=\frac{2}{t}-1-\frac{1}{t^2}=-\left(\frac{1}{t}-1\right)^2<0$,

$\therefore h(t)$在$(1,+\infty)$上单调递减,

$\therefore h(t)<h(1)=0$，从而$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}>4-2a$.

【例 2】(2020 成都调研)已知函数 $f(x)=(x+a)\mathrm{e}^{-x}$，若曲线 $y=f(x)$在点$(0，f(0))$处的切线与直线 $y=x-2$ 平行.

(1)求实数 a 的值;

(2)如果 $0<x_1<x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$，求证：$3x_1+x_2>3$.

(1)**解**　由 $f(x)=(x+a)\mathrm{e}^{-x}$，得 $f'(x)=(1-a-x)\mathrm{e}^{-x}$.

依题设 $f'(0)=1-a=1$，$\therefore a=0$.

(2)**证明**　由(1)知，$f(x)=x\mathrm{e}^{-x}$,

因为 $0<x_1<x_2$，且 $f(x_1)=f(x_2)$,

得$\frac{x_1}{\mathrm{e}^{x1}}=\frac{x_2}{\mathrm{e}^{x2}}$，所以 $x_2=x_1\mathrm{e}^{x_2-x_1}$,

令 $t=x_2-x_1(t>0)$，则 $x_1\mathrm{e}^t-x_1=t$,

得 $x_1=\frac{t}{\mathrm{e}^t-1}$，$x_2=\frac{t\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t-1}$.

要证 $3x_1+x_2>3$，即证$\frac{3t}{\mathrm{e}^t-1}+\frac{t\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t-1}>3$,

因为 $t>0$，所以 $\mathrm{e}^t-1>0$，即证$(t-3)\mathrm{e}^t+3t+3>0$.

设 $g(t)=(t-3)\mathrm{e}^t+3t+3(t>0)$,

则 $g'(t)=(t-2)\mathrm{e}^t+3(t>0)$.

令 $h(t)=(t-2)\mathrm{e}^t+3(t>0)$,

则 $h'(t)=(t-1)\mathrm{e}^t$,

当 $0<t<1$ 时，$h'(t)<0$，当 $t>1$ 时，$h'(t)>0$，所以函数 $h(t)$在$(0，1)$上单调递减，在$(1，+\infty)$上单调递增,

所以 $h(t)\geqslant h(1)=3-\mathrm{e}>0$，即 $g'(t)>0$，

所以 $g(t)$在$(0，+\infty)$上单调递增，所以 $g(t)>g(0)=0$，所以 $3x_1+x_2>3$.

思维升华　1.由 $f(x_1)=f(x_2)$，得$\dfrac{x_1}{\mathrm{e}^{x_1}}=\dfrac{x_2}{\mathrm{e}^{x_2}}$，引入 $t=x_2-x_1$，就是根据已知条件(或极值点)之间的关系构建等式，利用极值点之差作为变量，从而实现消参、减元的目的.

2.用 t 表示两个极值点的差，进而把所求问题转化为关于 t 的函数，借助导数求解.