江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三数学周三练习（3）理科

2018. 9. 19

范围：集合与逻辑、函数与导数、三角函数、平面向量、直线与圆

一、填空题：本大题共 14 小题，每小题 5 分，计 70 分. 不需写出解答过程，请把答案写在答题纸的指定位置上.

1．已知集合 $A=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$，$B=\{x|-1<x\leqslant 1\}$，则 $A\cap B=$____________.

2. 若命题 $p:\exists x\in \mathbf{R},使x^2+ax+1<0$，则$\neg p$：_________________.

3. 函数 $y=\sqrt{\dfrac{1-x}{x+2}}$ 的定义域为___________.

4. 曲线 $y=x-\cos x$ 在点 $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 处的切线的斜率为___________.

5. 已知平行直线 $l_1:x-2y-2=0,l_2:2x-4y+1=0$，则 l_1 与 l_2 之间的距离为_____________.

6. 已知函数 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的周期为 2 的奇函数，当 $0<x<1$时，$f(x)=8^x$，则 $f(-\dfrac{19}{3})=$_______.

7. 在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，若 $a^2-b^2=2bc$，$\sin C=3\sin B$，则 $A=$_________.

8. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}2x-1,x>0\\x^2+x,x\leqslant 0\end{cases}$，若函数 $g(x)=f(x)-m$ 有三个零点，则实数 m 的取值范围是________.

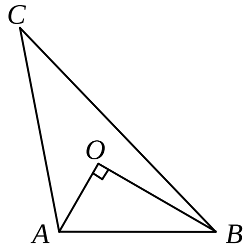
9. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}a^x（x<0），\\（a-3）x+4a（x\geqslant 0）\end{cases}$ 满足对任意 $x_1\neq x_2$，都有 $\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$ 成立，则 a 的取值范围是__________.

10. 已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\dfrac{\pi}{3})(\omega>0)$，将函数 $y=f(x)$ 的图象向右平移 $\dfrac{2}{3}\pi$ 个单位长度后，所得图象与原函数图象重合，则 ω 的最小值等于___________.

11. 在平面直角坐标系 xoy 中，A,B 为直线 $3x+y-10=0$ 上的两动点，以 AB 为直径的圆 M 恒过坐标原点 O，当圆 M 的半径最小时，其标准方程为______________.

12. 如图，点 O 为△ ABC 的重心，且 $OA\perp OB$，$AB=4$，

则 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BC}$ 的值为_________.



（第 12 题）

13. 已知 $y=f(x)(x\in R)$ 的导函数为 $f'(x)$. 若 $f(x)-f(-x)=2x^3$，且当 $x\geq 0$ 时，$f'(x)>3x^2$，则不等式 $f(x)-f(x-1)>3x^2-3x+1$ 的解集是__________.

14. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2, x\leq 1\\ f(x-2)+\dfrac{1}{2}, x>1\end{cases}$ 若方程 $f(x)=a|x-1|,(a\in R$ 有且仅有两个不相等的实数解，则实数 a 的取值范围是___________.

二、解答题：本大题共 6 小题，计 90 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤，请把答案写在答题纸的指定区域内.

15. （本小题满分 14 分）已知向量 $\vec{a}=(\sin(\dfrac{\omega}{2}x+\varphi),1)$，$\vec{b}=(1,\cos(\dfrac{\omega}{2}x+\varphi))$ $(\omega>0,0<\varphi<\dfrac{\pi}{4})$，记函数 $f(x)=(\vec{a}+\vec{b}\cdot(\vec{a}-\vec{b})$. 若函数 $y=f(x)$ 的周期为 4，且经过点 $M(1,\dfrac{1}{2})$.

（1）求 ω 的值； （2）当 $-1\leq x\leq 1$ 时，求函数 $f(x)$ 的最值.

16. 已知函数 $f(x)=3^x+\lambda\cdot 3^{-x}(\lambda\in\mathbf{R})$

（1）若 $f(x)$ 为奇函数，求 λ 的值和此时不等式 $f(x)>1$ 的解集；

（2）若不等式 $f(x)\leqslant 6$ 对 $x\in[0,2]$ 恒成立，求实数 λ 的取值范围.

17.（本小题满分 14 分）

已知圆 $M: x^2+y^2-2x+a=0$。

（1）若 $a=-8$，过点 $P(4,5)$ 作圆 M 的切线，求该切线方程；

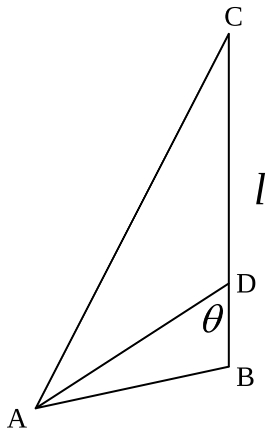
（2）若 AB 为圆 M 的任意一条直径，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-6$（其中 O 为坐标原点），求圆 M 的半径。

18. （本小题满分 16 分）

如图，某市在海岛 A 上建了一水产养殖中心。在海岸线 l 上有相距 70 公里的 B、C 两个小镇，并且 AB=30 公里，AC=80 公里，已知 B 镇在养殖中心工作的员工有 3 百人，C 镇在养殖中心工作的员工有 5 百人。现欲在 BC 之间建一个码头 D，运送来自两镇的员工到养殖中心工作，又知水路运输与陆路运输每百人每公里运输成本之比为 1∶2.

（1）求 $\sin\angle ABC$ 的大小；

（2）设 $\angle ADB=\theta$，试确定 θ 的大小，使得运输总成本最少。



19.（本小题满分 16 分）

设函数 $f(x)=x(x-1)^2$， $x>0$.

（1）求 $f(x)$ 的极值；

（2）设 $0<a\leqslant 1$，记 $f(x)$ 在 $\left(0,a\right]$ 上的最大值为 $F(a)$，求函数 $G(a)=\dfrac{F(a)}{a}$ 的最小值；

（3）设函数 $g(x)=\ln x-2x^2+4x+t$ （t 为常数），若使 $g(x)\leqslant x+m\leqslant f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上恒成立的实数 m 有且只有一个，求实数 m 和 t 的值.

20.（本小题满分 16 分）设常数 $a\geqslant 0$，函数 $f(x)=x-\ln^2 x+2a\ln x-1(x\in(0,+\infty))$.

（1）令 $g(x)=xf'(x)(x>0)$ 时，求的最小值，并比较 $g(x)$ 的最小值与零的大小；

（2）求证： $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数；

（3）求证：当 $x>1$ 时，恒有 $x>\ln^2 x-2a\ln x+1$.

江苏省仪征中学 2018-2019 学年第一学期高三

数学周三练习（3）理科参考答案

2018. 9. 19

1. $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$　2. $\forall x\in\mathbf{R}$, 使$x^2+ax+1\geqslant 0$　3. $(-2,1]$　4. 2　5. $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　6. -2

7. $\dfrac{\pi}{3}$　8. $(-\dfrac{1}{4},0]$　9. 0<a≤$\dfrac{1}{4}$　10. 3　11. $(x-3)^2+(y-1)^2=10$　12. 32

13. $(\dfrac{1}{2},+\infty)$　14. $(-\infty,0]\cup[\dfrac{1}{8},\dfrac{1}{6})\cup\{3-\sqrt{7}\}$

15. 解：(1) $f(x)=(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}^2-\vec{b}^2=\sin^2(\dfrac{\omega}{2}x+\varphi)-\cos^2(\dfrac{\omega}{2}x+\varphi)=-\cos(\omega x+2\varphi)$ …4 分

由题意得：周期$T=\dfrac{2\pi}{\omega}=4$，故$\omega=\dfrac{\pi}{2}$　………………6 分

(2)∵图象过点$M(1,\dfrac{1}{2})$，$\therefore -\cos(\dfrac{\pi}{2}+2\varphi)=\dfrac{1}{2}$

即$\sin 2\varphi=\dfrac{1}{2}$，而$0<\varphi<\dfrac{\pi}{4}$，故$2\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，则$f(x)=-\cos(\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{6})$.　………………10 分

当$-1\leq x\leq 1$时，$-\dfrac{\pi}{3}\leq\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{6}\leq\dfrac{2\pi}{3}$ $\therefore -\dfrac{1}{2}\leq\cos(\dfrac{\pi}{2}x+\dfrac{\pi}{6})\leq 1$

$\therefore$当$x=-\dfrac{1}{3}$时，$f(x)_{\min}=-1$，当$x=1$时，$f(x)_{\max}=\dfrac{1}{2}$.　………………14 分

16. 解：（1）函数$f(x)=3^x+\lambda\cdot 3^{-x}$的定义域为$\mathbf{R}$.

∵ $f(x)$为奇函数，∴ $f(-x)+f(x)=0$对$\forall x\in\mathbf{R}$恒成立，

即$3^{-x}+\lambda\cdot 3^x+3^x+\lambda\cdot 3^{-x}=(\lambda+1)(3^x+3^{-x})=0$对$\forall x\in\mathbf{R}$恒成立，

∴ $\lambda=-1$.　. . . . .　3 分

此时$f(x)=3^x-3^{-x}>1$即$(3^x)^2-3^x-1>0$，

解得$3^x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$或$3^x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去)，　. . . . .　6 分

∴解集为$\{x|x>\log_3\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\}$.　. . . . .　7 分

（2）由$f(x)\leqslant 6$得$3^x+\lambda\cdot 3^{-x}\leqslant 6$，即$3^x+\dfrac{\lambda}{3^x}\leqslant 6$，

令$t=3^x\in[1,9]$，原问题等价于$t+\dfrac{\lambda}{t}\leqslant 6$对$t\in[1,9]$恒成立，

亦即$\lambda\leqslant -t^2+6t$对$t\in[1,9]$恒成立，　. . . . .　10 分

令$g(t)=-t^2+6t, t\in[1,9]$，

∵ $g(t)$在$[1,3]$上单调递增，在$[3,9]$上单调递减，

∴当$t=9$时，$g(t)$有最小值$g(9)=-27$，∴ $\lambda\leqslant -27$.　. . . . .　14 分

17．解：（1）若$a=-8$，圆M：$(x-1)^2+y^2=9$，圆心M $(1,0)$，半径为 3.　……2 分

若切线斜率不存在，圆心M到直线$x=4$的距离为 3，

所以直线$x=4$为圆M的一条切线；　………4 分

若切线斜率存在，设切线方程为： $y-5=k(x-4)$，化简为： $kx-y-4k+5=0$，则圆心到直线的距离 $\frac{|k-4k+5|}{\sqrt{k^2+1}}=3$，解得： $k=\frac{8}{15}$.

所以切线方程为 $x=4$ 或 $8x-15y+43=0$； ………7 分

（2）圆 M 的方程可化为 $(x-1)^2+y^2=1-a$，圆心 M $(1,0)$，则 $OM=1$

设圆的半径 $r=\sqrt{1-a}(a<1)$ …………9 分

因为 AB 为圆 M 的任意一条直径，所以 $\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$，且 $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$，则

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MA})\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MB})=(\overrightarrow{OM})^2-(\overrightarrow{MB})^2=1-r^2$ …12 分

又因为 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=-6$，解得： $r=\sqrt{7}$，所以圆的半径为 $\sqrt{7}$. ………14 分

18．解：（1）在 ΔABC 中， $\cos\angle ABC=\frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC}=\frac{900+4900-6400}{2\times30\times70}=-\frac{1}{7}$ …3 分

所以 $\sin\angle ABC=\frac{4\sqrt{3}}{7}$ ………5 分

（2）在 ΔABD 中，由 $\frac{AD}{\sin\angle ABD}=\frac{AB}{\sin\theta}=\frac{BD}{\sin\angle BAD}$ 得： $\frac{30}{\sin\theta}=\frac{AD}{\frac{4\sqrt{3}}{7}}=\frac{BD}{-\frac{1}{7}\sin\theta+\frac{4\sqrt{3}}{7}\cos\theta}$

所以 $AD=\frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}}{\sin\theta}$， $BD=\frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}\cos\theta-\frac{30}{7}\sin\theta}{\sin\theta}=\frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{30}{7}$ ………9 分

设水路运输的每百人每公里的费用为 k 元，陆路运输的每百人每公里的费用为 $2k$ 元，
则运输总费用 $y=(5CD+3BD)\times2k+8\times k\times AD=2k[5(70-BD)+3BD+4AD]$

$=20k[35-2(\frac{\frac{12\sqrt{3}}{7}\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{3}{7})+4\times\frac{\frac{12\sqrt{3}}{7}}{\sin\theta}]=20k[35+\frac{6}{7}+\frac{24\sqrt{3}}{7}\cdot\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}]$ ……11 分

令 $H(\theta)=\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}$，则 $H'(\theta)=\frac{1-2\cos\theta}{\sin^2\theta}$，设 $H'(\theta)=0$，解得： $\cos\theta=\frac{1}{2},\theta=\frac{\pi}{3}$

当 $0<\theta<\frac{\pi}{3}$ 时， $H'(\theta)<0,H(\theta)$ 单调减；当 $\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时， $H'(\theta)>0,H(\theta)$ 单调增

$\therefore\theta=\frac{\pi}{3}$ 时， $H(\theta)$ 取最小值，同时 y 也取得最小值. ……14 分

此时 $BD=\frac{\frac{120\sqrt{3}}{7}\cos\theta}{\sin\theta}-\frac{30}{7}=\frac{90}{7}$，满足 $0<\frac{90}{7}<70$，所以点 D 落在 BC 之间

所以 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，运输总成本最小.

答： $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时，运输总成本最小. ………16 分

19. 解：

（1）$f'(x)=(x-1)^2+2x(x-1)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$，$x>0$. 令$f'(x)=0$，得$x=\frac{1}{3}$或$x=1$，$f(x)$，$f'(x)$随x的变化情况如下表

x	$(0,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
f′(x)	+	0	-	0	+
f(x)	增	极大值	减	极小值	增

∴当$x=\frac{1}{3}$时，有极大值$f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$，当$x=1$时，有极小值$f(1)=0$.

（2）由（1）知：$f(x)$在$(0,\frac{1}{3}]$，$[1,+\infty)$上是增函数，在$[\frac{1}{3},1]$上是减函数，

①$0<a\le\frac{1}{3}$时，$F(a)=a(a-1)^2$，$G(a)=(a-1)^2\ge\frac{4}{9}$

特别的，当$a=\frac{1}{3}$时，有$G(a)=\frac{4}{9}$，

②当$\frac{1}{3}<a\le1$时，$F(a)=f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}$，$G(a)=\frac{\frac{4}{27}}{a}\ge\frac{4}{27}$

特别的，当$a=1$时，有$G(a)=\frac{4}{27}$，

由①②知，当$0<a\le1$时，函数$G(a)=\frac{F(a)}{a}$的最小值为$\frac{4}{27}$.

（3）由已知得$h_1(x)=x+m-g(x)=2x^2-3x-\ln x+m-t\ge0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

∵$h'_1(x)=\frac{(4x+1)(x-1)}{x}$，

∴$x\in(0,1)$时，$h'_1(x)<0$，$x\in(1,+\infty)$时，$h_1(x)>0$

∴$x=1$时，$h'_1(x)$取极小值，也是最小值，

∴当$h_1(1)=m-t-1\ge0$，$m\ge t+1$时，$h_1(x)\ge0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

同样，$h_2(x)=f(x)-x-m=x^3-2x^2-m\ge0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

∵$h'_2(x)=3x(x-\frac{4}{3})$，

∴$x\in(0,\frac{4}{3})$时，$h'_2(x)<0$，$x\in(\frac{4}{3},+\infty)$，$h'_2(x)>0$，

∴$x=\frac{4}{3}$时，$h_2(x)$取极小值，也是最小值，

∴$h_2(\frac{4}{3})=-\frac{32}{27}-m\ge0$，$m\le-\frac{32}{27}$时，$h_2(x)\ge0$在$(0,+\infty)$上恒成立，

∴$t+1\le m\le-\frac{32}{27}$，

∵实数m有且只有一个，∴$m=-\frac{32}{27}$，$t=-\frac{59}{27}$.

20. （本小题满分 16 分）

解：（1）因为$f(x)=x-\ln^2x+2a\ln x-1(x\in(0,+\infty))$，

所以$f'(x)=1-[\frac{1}{x}\times\ln x+(\ln x)\times\frac{1}{x}]+\frac{2a}{x}=1-\frac{2\ln x}{x}+\frac{2a}{x}$. ……………………2 分

所以$g(x)=xf'(x)=x-2\ln x+2a,(x>0)$， ………………………3 分

所以 $g'(x)=1-\dfrac{2}{x}=\dfrac{x-2}{x}$，令 $g'(x)=0$，得 $x=2$．　　　　　…………………………4 分

列表如下：

x	（0，2）	2	（2，＋∞）
$g'(x)$	－	0	＋
$g(x)$	减	极小值 g(2)	增

所以 $g(x)$ 在 $x=2$ 处取得极小值 $g(2)=2-2\ln 2+2a$ ，

即 $g(x)$ 的最小值为 $g(2)=2-2\ln 2+2a=2(1-\ln 2)+2a$ • ……………………6 分

因为 $\ln 2<1$ ，所以 $1-\ln 2>0$ ，又 $a\geqslant 0$，所以 $g(2)>0$ • ……………………8 分

（2）由（1）知， $g(x)$ 的最小值为正数，

所以对一切 $x\in(0,+\infty)$ ，恒有 $g(x)=xf'(x)>0$． ………………………………10 分

从而当 $x>0$ 时，恒有， $f'(x)>0$ ，

故 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数．　　　　…………………………………………12 分

（3）由（2）知 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数，

所以当 $x>1$ 时， $f(x)>f(1)$ ．　　　　　……………………………………14 分

又 $f(1)=1-\ln^2 1+2a\ln 1-1=0$ ，

所以 $f(x)>0$ ，即 $x-\ln^2 x+2a\ln x-1>0$ ，……………………………………15 分

所以 $x>\ln^2 x-2a\ln x+1$，

故当 $x>1$ 时，恒有 $x>\ln^2 x-2a\ln x+1$． …………………………………………16 分