

2017-2018 学年度第二学期期末检测试题 (理)

高二数学试题 I 参考答案

2018. 5

1. 0 2. $\sqrt{5}$ 3. $\frac{1}{2}$ 4. 55 5. $(-1, 3)$ 6. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ 7. $2k+1$ 8. $\frac{3\sqrt{6}}{2}$
 9. $\sqrt{5}-2$ 10. $4034+\sqrt{2}$ 11. $\sqrt{5}$ 12. 150 13. ③④ 14. $a \in (-\infty, 2\sqrt{e}+1]$.

15. 解: (1) $\because \begin{cases} x-1 > 0 \\ 3-x > 0 \end{cases} \therefore 1 < x < 3 \quad \therefore A = (1, 3) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\therefore C_U A = (-\infty, 1] \cup [3, +\infty) \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$

(2) 令 $t = \lg x, x \in [1, 10]$, 则 $t \in [0, 1]$

$\therefore$ 函数 $y = \lg^2 x - \lg x + a$ 在 $x \in [1, 10]$ 上的值域即为 $h(t) = t^2 - t + a, t \in [0, 1]$ 的值域.

$\because$ 函数 $h(t)$ 在 $[0, \frac{1}{2}]$ 上单调减, 在 $[\frac{1}{2}, 1]$ 上单调增 $\therefore h(t)_{\min} = a - \frac{1}{4}, h(t)_{\max} = a$

$\therefore B = [a - \frac{1}{4}, a] \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

$\because A \cup B = A \quad \therefore B \subseteq A$

$\therefore \begin{cases} a - \frac{1}{4} > 1 \\ a < 3 \end{cases} \quad \text{解得: } \frac{5}{4} < a < 3 \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

16. 解: (1) 由 $C_n^3 = 5C_n^1$, 得 $\frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 5n, n \in N^*, \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

则 $n^2 - 3n - 28 = 0$, 解得 $n = 7$ 或 $n = -4 \quad \because n \in N^* \quad \therefore n = 7; \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

(2) 由 $T_{r+1} = C_7^r x^{7-r} (-\frac{2}{\sqrt[3]{x}})^r = C_7^r (-2)^r x^{7-\frac{4}{3}r}, r = 0, 1, \dots, 7 \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$

令 $7 - \frac{4}{3}r = 3$, 解得 $r = 3$, 所以 $T_4 = C_7^3 (-2)^3 x^3 = -280x^3$

故展开式中含 x^3 的项为 $-280x^3. \dots\dots\dots 14 \text{ 分}$

17. 解: (1) $\because$ 函数 $y = 3^x + 1$ 的值域为 $(1, +\infty)$, 且命题 p 真 $\therefore a \leq 1; \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

若 q 真, 则对任意实数 $x, f'(x) = 3x^2 + 2ax + 1 \geq 0$ 恒成立, 所以 $\Delta = 4a^2 - 12 \leq 0$,

解得: $-\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3}; \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\because$ “ $p \vee q$ ”是真命题, “ $p \wedge q$ ”是假命题

$\therefore$ 命题 p, q 一真一假

若 p 真 q 假, 可得 $\begin{cases} a \leq 1 \\ a < -\sqrt{3} \text{ 或 } a > \sqrt{3} \end{cases}$, 解得: $a < -\sqrt{3};$

若 q 真 p 假, 可得 $\begin{cases} a > 1 \\ -\sqrt{3} \leq a \leq \sqrt{3} \end{cases}$, 解得: $1 < a \leq \sqrt{3}$

综上, 实数 a 的取值范围为 $a < -\sqrt{3}$ 或 $1 < a \leq \sqrt{3}$8 分

(2) $\because$ 函数 $y = x^2 + bx + a$ 的图像与 x 轴有公共点 $\therefore b^2 - 4a \geq 0$, 即 $a \leq \frac{b^2}{4}$;10 分

$\because \neg p$ 是 $\neg m$ 的必要不充分条件, 即 p 是 m 的充分不必要条件

$\therefore \frac{b^2}{4} > 1$, 解得: $b > 2$ 或 $b < -2$14 分

18. 解: (1) 令 $x + \frac{4}{x} = 5$, 即 $x^2 - 5x + 4 = 0$, 解得: $x = 1$ 或 4 , 则玻璃栈道的长度为 $4 - 1 = 3$

$\therefore$ 玻璃栈道的长度为 3 百米.3 分

(2) 设 $M(x_1, x_1 + \frac{4}{x_1})$, 其中 $x_1 > 0$,

则 $OM^2 = x_1^2 + (x_1 + \frac{4}{x_1})^2 = 2x_1^2 + 8 + \frac{16}{x_1^2} \geq 2\sqrt{32} + 8 = 8\sqrt{2} + 8$, 当且仅当 $2x_1^2 = \frac{16}{x_1^2}$ 时, 即

$x_1 = \sqrt[4]{8}$ 时取等号.

$\therefore OM$ 取最小值时 M 点的横坐标为 $\sqrt[4]{8}$8 分

(3) 设 $Q(m, 0) (0 \leq m \leq 10)$,

$\because P$ 在 y 轴正半轴上, 且 $PO = 10 \therefore P(0, 10)$ 又 $\because B(10, 0)$

$\therefore PQ + QB = \sqrt{m^2 + 100} + 10 - m = \frac{100}{\sqrt{m^2 + 100} + m} + 10$ 在 $[0, 10]$ 上单调减

$\therefore$ 点 Q 越靠近点 B , $PQ + QB$ 越短.11 分

$\because$ 路线 PQ 不穿过景观湖 $\therefore$ 当直线 PQ 与边界曲线相切时, $PQ + QB$ 最短.

设切点为 $(x_2, x_2 + \frac{4}{x_2})$, 由 $y = x + \frac{4}{x} (x > 0)$ 得 $y' = 1 - \frac{4}{x^2}$

$\therefore$ 切线的方程为 $y - (x_2 + \frac{4}{x_2}) = (1 - \frac{4}{x_2^2})(x - x_2)$

$\because$ 切线过点 $P(0, 10)$, $\therefore 10 - (x_2 + \frac{4}{x_2}) = (1 - \frac{4}{x_2^2})(-x_2)$, 解得: $x_2 = \frac{4}{5}$

$\therefore$ 切线方程为: $y = -\frac{21}{4}x + 10$.

令 $y = 0$, 得 $x = \frac{40}{21}$, 即点 Q 在线段 OB 上且与点 O 的距离为 $\frac{40}{21}$ 百米.15 分

答: 当点 Q 在线段 OB 上且与点 O 的距离为 $\frac{40}{21}$ 百米时, $PQ + QB$ 最短.16 分

19. 解: (1) $\because f(x)$ 为偶函数

$\therefore f(x) = f(-x)$ 对 $x \in R$ 恒成立, 即 $x^2 + mx + n = (-x)^2 + m(-x) + n$ 对 $x \in R$ 恒成立,

$\therefore 2mx = 0$ 对 $x \in R$ 恒成立 $\therefore m = 0$ 3 分

(用特殊值求参数, 需要证明奇偶性; 也可用二次函数的对称轴为 y 轴来求解)

(2) 令 $t = 2^x$, $x \in (-1, 1]$, 则 $t \in (\frac{1}{2}, 2]$,

∵ 关于 x 的方程 $f(2^x) = 0$ 在 $(-1, 1]$ 上有两解

∴ $f(t) = t^2 + mt + m^2 - 3 = 0$ (*) 在 $(\frac{1}{2}, 2]$ 上有两解

① 若 $t = 2$ ，则 $2^2 + 2m + m^2 - 3 = 0$ ，解得： $m = -1$

当 $m = -1$ 时，方程的另一个解为 $-1 \notin (\frac{1}{2}, 2]$ ，不符合题意；5 分

② 若 (*) 在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上有 2 解，则 $\begin{cases} \Delta = m^2 - 4(m^2 - 3) > 0 \\ \frac{1}{2} < -\frac{m}{2} < 2 \\ f(\frac{1}{2}) > 0 \\ f(2) > 0 \end{cases}$ ，即 $\begin{cases} -2 < m < 2 \\ -4 < m < -1 \\ m > \frac{-1+3\sqrt{5}}{4} \text{ 或 } m < \frac{-1-3\sqrt{5}}{4} \\ m \neq -1 \end{cases}$

解得： $-2 < m < \frac{-1-3\sqrt{5}}{4}$

综上： $-2 < m < \frac{-1-3\sqrt{5}}{4}$ 8 分

(3) 不等式 $|f(x)| \geq x$ 等价于 $x^2 + mx + n \geq x$ 或 $x^2 + mx + n \leq -x$

等价于 $x + \frac{n}{x} \geq -m + 1$ 或 $x + \frac{n}{x} \leq -m - 1$

对任意的实数 m ，都存在实数 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ ，使得不等式 $|f(x)| \geq x$ 成立，即对任意的实数 m ，都

存在实数 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ ，使得不等式 $x + \frac{n}{x} \geq -m + 1$ 或 $x + \frac{n}{x} \leq -m - 1$ 成立，

问题等价于函数 $g(x) = x + \frac{n}{x}$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上最大值与最小值之差不小于 2. (*)

∵ $g'(x) = 1 - \frac{n}{x^2} = \frac{x^2 - n}{x^2}$, $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ ，且 $g'(x)$ 不恒为 0

当 $n \leq \frac{1}{4}$ 时，因为 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ ， $g'(x) \geq 0$ ， $g(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上单调递增， $g(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上最大值与

最小值之差为 $g(2) - g(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}n$ ，所以 $\frac{3}{2} - \frac{3}{2}n \geq 2$ ，解得： $n \leq -\frac{1}{3}$ ；

当 $\frac{1}{4} < n < 4$ 时， $x \in (\frac{1}{2}, \sqrt{n})$ 时， $g'(x) < 0$ ， $g(x)$ 单调递减，当 $x \in (\sqrt{n}, 2)$ 时， $g'(x) > 0$ ， $g(x)$

单调递增，要使 (*) 成立，则 $g(2) - g(\sqrt{n}) \geq 2$ 或 $g(\frac{1}{2}) - g(\sqrt{n}) \geq 2$ ，解得： $\frac{9}{4} \leq n < 4$ ；

当 $n \geq 4$ 时，因为 $x \in [\frac{1}{2}, 2]$ ， $g'(x) \leq 0$ ， $g(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上单调递减， $g(x)$ 在 $[\frac{1}{2}, 2]$ 上最大值与

最小值之差为 $g(\frac{1}{2}) - g(2) = \frac{3}{2}n - \frac{3}{2} \geq \frac{9}{2} \geq 2$ ，所以 (*) 必成立.

综上，实数 n 的取值范围为 $(-\infty, -\frac{1}{3}] \cup [\frac{9}{4}, +\infty)$.

20. 解：(1) ∵ $a = 0$ ∴ $f(x) = x \ln x$ ， $x \in (0, +\infty)$

∴ $f'(x) = \ln x + 1$ ，令 $f'(x) = 0$ ，解得： $x = \frac{1}{e}$ ，列表得：

x	$(0, \frac{1}{e})$	$\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	单调减	极小值	单调增

∴ $f(x)$ 的单调减区间为 $(0, \frac{1}{e})$, 单调增区间为 $(\frac{1}{e}, +\infty)$, $f(x)_{\min} = f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$;3 分

(2) ∵ $f(x)$ 有两个极值点

∴ $f'(x) = (\ln x - ax) + x(\frac{1}{x} - a) = \ln x - 2ax + 1$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的零点, 且零点左右的 $f'(x)$ 的符号的相反.5 分

设 $h(x) = \ln x - 2ax + 1$, 则 $h'(x) = \frac{1}{x} - 2a$.

当 $a \leq 0$ 时, $h'(x) > 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调增, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上最多有一个零点, 不合题意;

当 $a > 0$ 时, 由 $h'(x) = \frac{1}{x} - 2a = 0$, 解得: $x = \frac{1}{2a}$

∴ $x \in (0, \frac{1}{2a})$ 时, $h'(x) > 0$, $x \in (\frac{1}{2a}, +\infty)$ 时, $h'(x) < 0$

∴ $h(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2a})$ 上单调增, 则 $(\frac{1}{2a}, +\infty)$ 上单调减, $h(x)_{\max} = h(\frac{1}{2a}) = \ln \frac{1}{2a}$

若 $a \geq \frac{1}{2}$, 则 $0 < \frac{1}{2a} \leq 1$, 所以 $h(x) \leq h(\frac{1}{2a}) \leq 0$, $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上最多有一个零点, 不合题意;

若 $0 < a < \frac{1}{2}$, $h(\frac{1}{2a}) > 0$, 又 $h(\frac{1}{e}) = \ln \frac{1}{e} - \frac{2a}{e} + 1 = -\frac{2a}{e} < 0$, $h(\frac{1}{a^2}) = \ln \frac{1}{a^2} - \frac{2a}{a^2} + 1 = -\frac{2}{a} + 2 \ln \frac{1}{a} + 1$

(取其他小于 0 的函数值也可)

设 $H(x) = \ln x - x$, $x \in (1, +\infty)$, 则 $H'(x) = \frac{1}{x} - 1 < 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立

∴ $H(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调减 ∴ $H(x) < H(1) = -1$, 则 $x > 1$ 时, $\ln x - x < -1$

∴ $\frac{1}{a} > 2$ ∴ $\ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a} < -1$ ∴ $h(\frac{1}{a^2}) = 2(\ln \frac{1}{a} - \frac{1}{a}) + 1 < -2 + 1 < 0$

∴ $h(x)$ 在 $(\frac{1}{e}, \frac{1}{2a})$ 、 $(\frac{1}{2a}, \frac{1}{a^2})$ 上各有一个零点, 且零点两侧的函数符号相反

∴ $0 < a < \frac{1}{2}$ (若用分离变量做, 不取点说明零点存在, 扣 2 分)10 分

(3) 结论: $x_1 x_2 < (x_1 + x_2)^4$. 下面证明:

由 (1) 知: $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{e})$ 上单调减, 在 $(\frac{1}{e}, +\infty)$ 上单调增

∴ $\frac{1}{e} < x_1 < x_1 + x_2 < 1$ ∴ $f(x_1 + x_2) > f(x_1)$, 即 $(x_1 + x_2) \ln(x_1 + x_2) > x_1 \ln x_1$

∴ $\ln x_1 < \frac{x_1 + x_2}{x_1} \ln(x_1 + x_2)$, 同理 $\ln x_2 < \frac{x_1 + x_2}{x_2} \ln(x_1 + x_2)$

∴ $\ln x_1 + \ln x_2 < (\frac{x_1 + x_2}{x_1} + \frac{x_1 + x_2}{x_2}) \ln(x_1 + x_2) = (2 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}) \ln(x_1 + x_2)$

∴ $2 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2} \geq 4$, 当且仅当 $x_1 = x_2$ 时取等号, 且 $\ln(x_1 + x_2) < 0$

∴ $(2 + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_1}{x_2}) \ln(x_1 + x_2) \leq 4 \ln(x_1 + x_2)$, 则 $\ln x_1 + \ln x_2 < 4 \ln(x_1 + x_2)$

∴ $\ln(x_1 x_2) < \ln(x_1 + x_2)^4$ ∴ $x_1 x_2 < (x_1 + x_2)^4$16 分

2017-2018 学年度第二学期期末检测试题（理）

高二数学试题 II 参考答案

2018. 5

21. 解：（1）由二项展开式的通项公式可得 $a_1 = C_n^1 \times (-2) = -2n = -10$

解得： $n = 5$;4 分

（2）令 $x = 0$ 时，则 $a_0 = 1$;6 分

令 $x = 1$ ，则 $(1 - 2 \times 1)^5 = a_0 + a_1 + \dots + a_5$ ，即 $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_5 = -1$ 9 分

$\therefore a_1 + a_2 + \dots + a_n = -2$ 10 分

22. 解：（1） X 的取值有 0,1,2.

$$P(X=0) = \frac{C_3^3}{C_5^3} = \frac{1}{10}; \quad P(X=1) = \frac{C_3^2 C_2^1}{C_5^3} = \frac{3}{5}; \quad P(X=2) = \frac{C_3^1 C_2^2}{C_5^3} = \frac{3}{10}$$

所以 X 的概率分布为6 分

X	0	1	2
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{10}$

$$(2) E(X) = 0 \times \frac{1}{10} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{3}{10} = \frac{6}{5}$$
9 分

答： X 的数学期望为 $\frac{6}{5}$10 分

23. 解：（1）取 A 为原点，直线 AB ， AD ， AP 分别为 x ， y ， z 轴，建立空间直角坐标系 $A-xyz$1 分

不妨设 $PA = AB = 1$ ，则 $P(0,0,1)$ ， $B(1,0,0)$ ， $C(1,1,0)$ ， $D(0,1,0)$.

$$\therefore \overrightarrow{BP} = (-1, 0, 1) \quad \because \overrightarrow{PM} = 3\overrightarrow{MC} \quad \therefore M\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \quad \therefore \overrightarrow{DM} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right); \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

设直线 PB 与直线 DM 所成角为 α .

$$\therefore \cos \alpha = \left| \frac{\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{DM}}{|\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{DM}|} \right| = \left| \frac{-1 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{1}{4}}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \times \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2}} \right| = \frac{\sqrt{22}}{11};$$

$\therefore$ 直线 PB 与直线 DM 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{22}}{11}$;5 分

$$(2) \because \overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{MC} \quad \therefore M\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{1}{1+\lambda}\right), \text{ 则 } \overrightarrow{BM} = \left(-\frac{1}{1+\lambda}, \frac{\lambda}{1+\lambda}, \frac{1}{1+\lambda}\right)$$

设平面 MBD 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$ $\therefore \vec{n} \perp \overrightarrow{BD}, \vec{n} \perp \overrightarrow{BM} \quad \because \overrightarrow{BD} = (-1, 1, 0)$

$$\therefore \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = -x + y = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{1+\lambda}x + \frac{\lambda}{1+\lambda}y + \frac{1}{1+\lambda}z = 0 \end{cases}, \text{ 解得: } \begin{cases} x = y \\ z = (1-\lambda)y \end{cases}, \text{ 取 } y = 1,$$

则平面 MBD 的一个法向量为 $\vec{n} = (1, 1, 1 - \lambda)$7 分

设直线 PB 与平面 MBD 所成角为 β , 且 $\cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\because \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ $\therefore \sin \beta = \frac{\sqrt{6}}{3}$

$$\because \vec{BP} = (-1, 0, 1) \therefore \sin \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{BP}|}{|\vec{n}| |\vec{BP}|} = \frac{|-1 \times 1 + (1 - \lambda) \times 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (1 - \lambda)^2}} = \frac{\lambda}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{\lambda^2 - 2\lambda + 3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

解得: $\lambda = 2$ 或 $\lambda = 6$10 分

24. 解: (1) $f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 3, f(4) = 5$

$$\therefore f(1)f(3) - f^2(2) = -1, \quad f(2)f(4) - f^2(3) = 1 \quad \text{.....3 分}$$

(2) 猜想: $f(n)f(n+2) - f^2(n+1) = (-1)^n, \quad n \in N^*$ 4 分

①当 $n = 1$ 时, $f(1)f(3) - f^2(2) = -1$, 结论成立;

②假设 $n = k$ 时, 结论成立, 即 $f(k)f(k+2) - f^2(k+1) = (-1)^k$;

由题意知: $f(n+2) = f(n+1) + f(n)$ 对 $n \in N^*$ 恒成立

$$\text{当 } n = k+1 \text{ 时, } f(k+1)f(k+3) - f^2(k+2) = f(k+1)[f(k+1) + f(k+2)] - f^2(k+2)$$

$$= f(k+1)f(k+2) + f^2(k+1) - f^2(k+2) = f(k+2)[f(k+1) - f(k+2)] + f^2(k+1)$$

$$= f^2(k+1) - f(k)f(k+2) = (-1)[f(k)f(k+2) - f^2(k+1)] = (-1) \cdot (-1)^k = (-1)^{k+1}$$

$\therefore$ 当 $n = k+1$ 时, 结论成立

综合①②, $f(n)f(n+2) - f^2(n+1) = (-1)^n, \quad n \in N^*$10 分