江苏省仪征中学 2021-2022 学年度第一学期高三数学学科导学案

§8.2　两条直线的位置关系

研制人：谢霞　　审核人：陈宏强

班级：____________ 姓名：____________学号：________授课日期：________

①结合斜率公式，判断两条直线平行或垂直，凸显逻辑推理的核心素养.
②结合解方程组求两条相交直线的交点坐标，凸显数学运算的核心素养.
③结合距离问题，考查距离公式的应用，凸显数学运算、直观想象的核心素养.

课前热身

1．(点到直线的距离)已知点(a,2)(a>0)到直线 l：x－y＋3＝0 的距离为 1，则 a 等于(　　)

A.$\sqrt{2}$　　B．$2-\sqrt{2}$

C.$\sqrt{2}-1$　　D.$\sqrt{2}+1$

解析：选 C　由题意知$\frac{|a-2+3|}{\sqrt{2}}=1$，∴$|a+1|=\sqrt{2}$，又 $a>0$，∴$a=\sqrt{2}-1$.

2．(点关于线对称)点(a，b)关于直线 x＋y＋1＝0 的对称点是(　　)

A．(－a－1，－b－1)　　B．(－b－1，－a－1)

C．(－a，－b)　　D．(－b，－a)

解析：选 B　设对称点为(x',y')，则$\begin{cases}\frac{y'-b}{x'-a}\times(-1)=-1,\\ \frac{x'+a}{2}+\frac{y'+b}{2}+1=0,\end{cases}$

解得 $x'=-b-1$，$y'=-a-1$.

3．已知直线 l_1：$mx+y-1=0$ 与直线 l_2：$(m-2)x+my-2=0$，则“$m=1$”是“$l_1\perp l_2$”的(　　)

A．充分不必要条件　　B．充要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

由 $l_1\perp l_2$，得 $m(m-2)+m=0$，解得 $m=0$ 或 $m=1$，所以“$m=1$”是“$l_1\perp l_2$”的充分不必要条件，故选 A.

4．(多选)直线 l_1：$x+my-1=0$，l_2：$(m-2)x+3y+1=0$，则下列说法正确的是(　　)

A．若 $l_1\parallel l_2$，则 $m=-1$ 或 $m=3$

B．若 $l_1\parallel l_2$，则 $m=-1$

C．若 $l_1\perp l_2$，则 $m=-\frac{1}{2}$

D．若 $l_1\perp l_2$，则 $m=\frac{1}{2}$

[解析] AD　(1)∵$l_1 \parallel l_2$，∴$\begin{cases} m(m-2)=3, \\ m-2\neq -1, \end{cases}$

解得 $m=-1$ 或 $m=3$，经检验符合题意，∴A 正确．

∵$l_1\perp l_2$，∴$(m-2)\times 1+3m=0$，

解得 $m=\frac{1}{2}$，∴D 正确．

5．已知直线$(m+1)x+(2m-1)y=3$与$(3m-1)x-(2m^2-11m+5)y=5$平行，则实数 m 的值为________．

解析：当 $m\neq\frac{1}{2}$时，由直线平行可知$\frac{m+1}{3m-1}=\frac{2m-1}{-(2m^2-11m+5)}\neq\frac{3}{5}$，解得 $m=-2$ 或 $m=3$，当 $m=\frac{1}{2}$时，两条直线都垂直于 x 轴也符合．故 $m=\frac{1}{2}$或 $m=-2$，或 $m=3$.

答案：$\frac{1}{2}$，-2,3

6．过两直线 $l1$：$x-3y+4=0$ 和 $l2$：$2x+y+5=0$ 的交点和原点的直线方程为_________________．

解析：过两直线交点的直线系方程为 $x-3y+4+\lambda(2x+y+5)=0$，代入原点坐标，求得 $\lambda=-\frac{4}{5}$，故所求直线方程为 $x-3y+4-\frac{4}{5}(2x+y+5)=0$，即 $3x+19y=0$.

答案：$3x+19y=0$

知识梳理

1. 两直线的位置关系
2. 三种距离公式

典例研究

考点一　两条直线的平行与垂直

例 1.（1）已知直线 l_1：$mx+y+4=0$ 和直线 l_2：$(m+2)x-ny+1=0(m>0，n>0)$互相垂直，则$\frac{m}{n}$的取值范围为________．

解析：因为 $l_1\perp l_2$，所以 $m(m+2)+1\times(-n)=0$，得 $n=m^2+2m$，因为 $m>0$，所以$\frac{m}{n}=\frac{m}{m^2+2m}=\frac{1}{m+2}$，则 $0<\frac{1}{m+2}<\frac{1}{2}$，故$\frac{m}{n}$的取值范围为$\left(0，\frac{1}{2}\right)$.

答案：$\left(0，\frac{1}{2}\right)$

（2）若直线 l_1：$x+2my-1=0$ 与 l_2：$(3m-1)x-my-1=0$ 平行，则实数 m 的值为________．

解析：因为直线 l_1：$x+2my-1=0$ 与 l_2：$(3m-1)x-my-1=0$ 平行，则斜率相等或者斜率不存在，$-\frac{1}{2m}=\frac{3m-1}{m}$ 或者 $m=0$，所以 $m=\frac{1}{6}$ 或 0.

答案：0 或 $\frac{1}{6}$

考点二　两直线的交点与距离问题

例 2. (1)经过两条直线 l_1：$x+y-4=0$ 和 l_2：$x-y+2=0$ 的交点，且与直线 $2x-y-1=0$ 垂直的直线方程为________________.

(2)直线 l 过点 $P(-1,2)$且到点 $A(2,3)$和点 $B(-4,5)$的距离相等，则直线 l 的方程为________________．

[解析]　(1)由 $\begin{cases}x+y-4=0,\\x-y+2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=1,\\y=3,\end{cases}$ ∴l_1 与 l_2 的交点坐标为(1,3)．设与直线 $2x-y-1=0$ 垂直的直线方程为 $x+2y+c=0$，则 $1+2\times3+c=0$，∴$c=-7$.∴所求直线方程为 $x+2y-7=0$.

(2)法一：当直线 l 的斜率存在时，

设直线 l 的方程为 $y-2=k(x+1)$，即 $kx-y+k+2=0$.

由题意知 $\frac{|2k-3+k+2|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{|-4k-5+k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$，

即 $|3k-1|=|-3k-3|$，∴$k=-\frac{1}{3}$，

∴直线 l 的方程为 $y-2=-\frac{1}{3}(x+1)$，即 $x+3y-5=0$.

当直线 l 的斜率不存在时，直线 l 的方程为 $x=-1$，也符合题意.

法二：当 $AB\parallel l$ 时，有 $k=k_{AB}=-\frac{1}{3}$，

直线 l 的方程为 $y-2=-\frac{1}{3}(x+1)$，即 $x+3y-5=0$.

当 l 过 AB 中点时，AB 的中点为(-1,4)，

∴直线 l 的方程为 $x=-1$.

故所求直线 l 的方程为 $x+3y-5=0$ 或 $x=-1$.

考点三　对称问题

例 3.（1）过点 $P(0,1)$作直线 l 使它被直线 l_1：$2x+y-8=0$ 和 l_2：$x-3y+10=0$ 截得的线段被点 P 平分，则直线 l 的方程为____________________．

[解析] 设直线 l_1 与直线 l 的交点为 $A(a,8-2a)$，

则由题意知，点 A 关于点 P 的对称点 $B(-a,2a-6)$在 l_2 上，把 B 点坐标代入直线 l_2 的方程得 $-a-3(2a-6)+10=0$，

解得 $a=4$，即点 $A(4,0)$在直线 l 上，

所以由两点式得直线 l 的方程为 $x+4y-4=0$.

[答案] $x+4y-4=0$

（2）已知直线 l：$2x-3y+1=0$，点 $A(-1，-2)$，则直线 l 关于点 A 对称的直线 m 的方程为________________．

[解析] 在直线 l 上取两点 $B(1,1)$，$C(10,7)$，B，C 两点关于点 A 的对称点为 $B'(-3，-5)$，$C'(-12，-11)$，

所以直线 m 的方程为 $\frac{y+11}{-5+11}=\frac{x+12}{-3+12}$，

即 $2x-3y-9=0$.

[答案] $2x-3y-9=0$

考点四　直线系方程的应用

例 4.已知两条直线 l_1：$x-2y+4=0$ 和 l_2：$x+y-2=0$ 的交点为 P，求过点 P 且与直线 l_3：$3x-4y+5=0$ 垂直的直线 l 的方程．

[解] **法一：**解方程组 $\begin{cases}x-2y+4=0,\\x+y-2=0,\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x=0,\\y=2.\end{cases}$

故 P 点坐标为$(0,2)$，因为直线 l 与 $3x-4y+5=0$ 垂直，

所以直线 l 的方程为 $y-2=-\frac{4}{3}x$，

即 $4x+3y-6=0$.

法二：设所求直线 l 的方程为：$x-2y+4+\lambda(x+y-2)=0$，即$(1+\lambda)x+(\lambda-2)y+4-2\lambda=0$，因为直线 l 与 l_3 垂直，所以 $3(1+\lambda)-4(\lambda-2)=0$，所以 $\lambda=11$，所以直线 l 的方程为 $4x+3y-6=0$.

课堂小结

跟踪反馈

1. 若直线 $ax+2y+1=0$ 与直线 $x+y-2=0$ 互相垂直，那么 a 的值等于(　　)

A．1　　　　B．$-\frac{1}{3}$

C．$-\frac{2}{3}$　　　　D．-2

解析：选 D　由 $a\times1+2\times1=0$ 得 $a=-2$.故选 D.

2．设 $a\in R$，则“$a=1$”是“直线 l_1：$ax+2y-1=0$ 与直线 l_2：$x+(a+1)y+4=0$ 平行”的(　　)

A．充分不必要条件　　　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　　　D．既不充分也不必要条件

解析：选 A　若两直线平行，则 $a(a+1)=2$，即 $a^2+a-2=0$，$\therefore a=1$ 或 -2，故 $a=1$ 是两直线平行的充分不必要条件.

3．已知 $A(4，-3)$关于直线 l 的对称点为 $B(-2,5)$，则直线 l 的方程是(　　)

A．$3x+4y-7=0$　　　　B．$3x-4y+1=0$

C．$4x+3y-7=0$　　　　D．$3x+4y-1=0$

解析：选 B　由题意得 AB 的中点 C 为$(1,1)$，又 A，B 两点连线的斜率为 $k_{AB}=\frac{5+3}{-2-4}=-\frac{4}{3}$，所以直线 l 的斜率为$\frac{3}{4}$，因此直线 l 的方程为 $y-1=\frac{3}{4}(x-1)$，即 $3x-4y+1=0$.故选 B.

4．直线 $3x-4y+5=0$ 关于 x 轴对称的直线的方程是(　　)

A．$3x+4y+5=0$　　　　B．$3x+4y-5=0$

C．$-3x+4y-5=0$　　　　D．$-3x+4y+5=0$

解析：选 A　在所求直线上任取一点 $P(x，y)$，则点 P 关于 x 轴的对称点 $P'(x，-y)$在已知的直线 $3x-4y+5=0$ 上，所以 $3x-4(-y)+5=0$，即 $3x+4y+5=0$，故选 A.

5．已知点 $P(4，a)$到直线 $4x-3y-1=0$ 的距离不大于 3，则 a 的取值范围是(　　)

A．[－10,10]　　　　　　　　B．[－10,5]

C．[－5,5]　　　　　　　　　D．[0,10]

解析：选 D　由题意得，点 P 到直线的距离为

$\frac{|4\times4-3\times a-1|}{5}=\frac{|15-3a|}{5}$.

又 $\frac{|15-3a|}{5}\leqslant3$，即 $|15-3a|\leqslant15$，

解得 $0\leqslant a\leqslant10$，所以 a 的取值范围是 $[0,10]$.

6．(多选) 已知直线 l_1：$2x+3y-1=0$ 和 l_2：$4x+6y-9=0$，若直线 l 到直线 l_1 的距离与到直线 l_2 的距离之比为 1∶2，则直线 l 的方程为(　　)

A．$2x+3y-8=0$　　　　　　B．$4x+6y+5=0$

C．$6x+9y-10=0$　　　　　　D．$12x+18y-13=0$

解析：选 BD　设直线 l：$4x+6y+m=0$，$m\neq-2$ 且 $m\neq-9$，

直线 l 到直线 l_1 和 l_2 的距离分别为 d_1,d_2，由题知：$d_1=\frac{|m+2|}{\sqrt{16+36}}$，$d_2=\frac{|m+9|}{\sqrt{16+36}}$.因为 $\frac{d_1}{d_2}=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{2|m+2|}{\sqrt{16+36}}=\frac{|m+9|}{\sqrt{16+36}}$，即 $2|m+2|=|m+9|$，解得 $m=5$ 或 $m=-\frac{13}{3}$，即直线 l 为 $4x+6y+5=0$ 或 $12x+18y-13=0$.

7．(多选)若三条直线 $2x+y-4=0$，$x-y+1=0$ 与 $ax-y+2=0$ 共有两个交点，则实数 a 的值为(　　)

A.1　　　　B.2　　　　C.-2　　　　D.-1

AC【解析】由题意可得三条直线中，有两条直线互相平行.∵直线 $x-y+1=0$ 和直线 $2x+y-4=0$ 不平行，∴直线 $x-y+1=0$ 和直线 $ax-y+2=0$ 平行或直线 $2x+y-4=0$ 和直线 $ax-y+2=0$ 平行.∵$x-y+1=0$ 的斜率为 1，$2x+y-4=0$ 的斜率为 -2，$ax-y+2=0$ 的斜率为 a，∴$a=1$ 或 $a=-2$.故选 AC.

8. 与直线 $x-2y+3=0$ 平行，且与两坐标轴围成的三角形的面积为 4 的直线方程是__________.

解析：设所求直线方程为 $x-2y+\lambda=0$，令 $x=0$，得 $y=\frac{\lambda}{2}$；令 $y=0$，得 $x=-\lambda$.由题意，得 $\frac{1}{2}\cdot\left|\frac{\lambda}{2}\right|\cdot|-\lambda|=4$，解得 $\lambda=\pm4$.故所求直线方程为 $x-2y\pm4=0$.

答案：$x-2y\pm4=0$

9. 若两直线 $kx-y+1=0$ 和 $x-ky=0$ 相交且交点在第二象限，则 k 的取值范围是________.

解析：由题意知 $k\neq\pm1$.联立 $\begin{cases}kx-y+1=0,\\x-ky=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x=\dfrac{k}{1-k^2},\\y=\dfrac{1}{1-k^2},\end{cases}$　　$\therefore\begin{cases}\dfrac{k}{1-k^2}<0,\\\dfrac{1}{1-k^2}>0,\end{cases}$　　$\therefore -1<k<0$.

答案：(－1,0)

10. 设$m\in\mathrm{R}$，过定点A的动直线$x+my=0$和过定点B的动直线$mx-y+3-m=0$交于点$P(x,y)$，则$|PA|\cdot|PB|$的最大值是________．

解析：动直线 $x+my=0(m\neq0)$过定点 $A(0,0)$，

动直线 $mx-y+3-m=0$ 过定点 $B(1,3)$.

由题意易得直线 $x+my=0$ 与直线 $mx-y+3-m=0$ 垂直，即$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2$.

当 $m=0$ 时，直线 $x=0$ 与 $y=3$ 垂直，也满足$|PA|^2+|PB|^2=|AB|^2$.

$\therefore |PA|\cdot|PB|\leqslant\dfrac{|PA|^2+|PB|^2}{2}=\dfrac{|AB|^2}{2}=\dfrac{1^2+3^2}{2}=5$,

即$|PA|\cdot|PB|$的最大值为 5.

答案：5

11. 求过直线$2x+7y-4=0$与$7x-21y-1=0$的交点，且和$A(-3,1)$，$B(5,7)$等距离的直线方程．

[解]　设所求直线方程为 $2x+7y-4+\lambda(7x-21y-1)=0$,

即$(2+7\lambda)x+(7-21\lambda)y+(-4-\lambda)=0$,

由点 $A(-3,1)$，$B(5,7)$到所求直线等距离，可得

$$\frac{|(2+7\lambda)\times(-3)+(7-21\lambda)\times1-4-\lambda|}{\sqrt{(2+7\lambda)^2+(7-21\lambda)^2}}$$

$$=\frac{|(2+7\lambda)\times5+(7-21\lambda)\times7-4-\lambda|}{\sqrt{(2+7\lambda)^2+(7-21\lambda)^2}},$$

整理可得$|43\lambda+3|=|113\lambda-55|$,

解得 $\lambda=\dfrac{29}{35}$或 $\lambda=\dfrac{1}{3}$,

所以所求的直线方程为 $21x-28y-13=0$ 或 $x=1$.

12．已知方程$(2+\lambda)x-(1+\lambda)y-2(3+2\lambda)=0$与点$P(-2,2)$．

(1)证明：对任意的实数λ，该方程都表示直线，且这些直线都经过同一定点，并求出这一定点的坐标；

(2)证明：该方程表示的直线与点P的距离d小于$4\sqrt{2}$.

证明：(1)显然 $2+\lambda$ 与$-(1+\lambda)$不可能同时为零，故对任意的实数 λ，该方程都表示直线.

$\because$方程可变形为 $2x-y-6+\lambda(x-y-4)=0$,

$\therefore\begin{cases}2x-y-6=0,\\x-y-4=0,\end{cases}$　解得$\begin{cases}x=2,\\y=-2,\end{cases}$

故直线经过的定点为 $M(2,-2)$.

(2)过 P 作直线的垂线段 PQ，由垂线段小于斜线段知 $|PQ| \leqslant |PM|$，当且仅当 Q 与 M 重合时，$|PQ|=|PM|$，此时对应的直线方程是 $y+2=x-2$，即 $x-y-4=0$.

但直线系方程唯独不能表示直线 $x-y-4=0$，

$\therefore M$ 与 Q 不可能重合，而 $|PM|=4\sqrt{2}$，

$\therefore |PQ|<4\sqrt{2}$，故所证成立.